

Ito-Taylor-Verfahren für stochastische affine Kontrollsysteme

Diplomarbeit
von
Polina Zeidis

eingereicht beim
Fachbereich Mathematik
der Universität Frankfurt am Main

17. Juli 2002

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	4
Bezeichnungen	5
1 Einführung	6
2 Grundlagen	13
2.1 Existenz- und Eindeutigkeitssatz	13
2.2 Notation	18
2.2.1 Multiindizes	18
2.2.2 Mehrfache Ito-Kontrollintegrale	19
2.2.3 Ito-Kontroll-Koeffizientenfunktionen	20
2.2.4 Hierarchische Mengen und Restmengen	21
2.3 Kettenregel für stochastische affine Kontrollsysteme	22
2.4 Illustratives Beispiel	23
2.5 Die Ito-Taylor-Entwicklung für stochastische affine Kontrollsysteme	26

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	2
3 Starke Approximationen	30
3.1 Über den Zusammenhang zwischen lokalem und globalem Diskretisierungsfehler	32
3.2 Fehlerabschätzungen für Einschnitt- approximationen	40
3.3 Ito-Taylor-Verfahren der starken Ordnung γ für stochastische affine Kontrollsysteme	49
3.3.1 Das Euler-Schema	50
3.3.2 Das Ito-Taylor-Schema der starken Ordnung $\gamma = 1$	51
3.3.3 Das Ito-Taylor-Schema der starken Ordnung $\gamma = \frac{3}{2}$	52
3.3.4 Das Ito-Taylor-Schema der starken Ordnung $\gamma = \frac{3}{2}$ für kommutatives Rauschen zweiter Art	53
3.3.5 Ableitungsfreie starke Schemata	55
3.4 Numerische Beispiele für starke Approximationen	57
3.4.1 Ein zweidimensionales stochastisches affines Kontrollsystem	57
3.4.2 Eine skalare stochastische Differentialgleichung mit Kontrolle	59
3.4.3 Das Räuber-Beute-Modell	61
4 Schwache Approximationen	64
4.1 Bedingungen für schwache Konvergenz	66
4.2 Bestimmung der hierarchischen Menge für schwache Approximationen	67
4.3 Die Wahl der Zufallsvariablen Z_α	88
4.3.1 Approximation der Ito-Kontrollintegrale für $\beta = 1$	91

4.3.2	Approximation der Ito-Kontrollintegrale für $\beta = 2$	92
4.4	Ito-Taylor-Verfahren der schwachen Ordnung β für stochastische affine Kontrollsysteme	97
4.4.1	Das Euler-Schema	98
4.4.2	Das Ito-Taylor-Schema der schwachen Ordnung 2	98
4.4.3	Das Ito-Taylor-Schema der schwachen Ordnung 3	100
4.4.4	Ableitungsfreie schwache Schemata	100
4.5	Numerische Beispiele für schwache Approximationen	104
5	Offene Probleme	107
A	Benutzte Formeln	109
B	Hilfskonstruktionen	111
B.1	Box-Müller Methode zur Konstruktion $N(0, 1)$ -verteilter Zufallsvariablen aus auf $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen.	111
B.2	Lévy-Konstruktion.	112
	Literaturverzeichnis	114

Abbildungsverzeichnis

3.1	Exakte Lösung und Euler-Approximation für $X_1(t)$ und $X_2(t)$	58
3.2	Fehler des Milstein-Verfahrens (schwarz) und Gerade $y = x$ (gestrichelt) in log-log-Skalierung.	59
3.3	Exakte Lösung $X(t)$ mit Euler- (links) und Milstein-Verfahren (rechts).	60
3.4	Fehler des Euler-Verfahrens über Δ im Vergleich zur Geraden $y = \frac{1}{2}x$ (links) und des Milstein-Verfahrens im Vergleich zur Geraden $y = x$ (rechts).	61
3.5	Räuber-Beute-Modell mit konstanter Kontrolle $u = 0,5$	62
3.6	Gestörtes Räuber-Beute Modell mit affiner Kontrolle	63
4.1	Fehler des schwachen Euler-Verfahrens und die Gerade $y = x$ (links) und Fehler des Verfahrens der schwachen Ordnung 2 im Vergleich zur Geraden $y = 2x$ (rechts) in log-log-Skalierung.	105
4.2	$EX(t)$ (schwarz) und ihre Euler-Approximation (gestrichelt).	106

Bezeichnungen

\mathbb{R} reelle Zahlen

\mathbb{N} natürliche Zahlen

$\delta_{i,j}$ Kronecker-Symbol:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i = j \\ 0 & , \text{ falls } i \neq j \end{cases}$$

$\mathbf{1}_A$ Charakteristische Funktion:

$$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 & , \text{ falls die Bedingung } A \text{ erfüllt ist} \\ 0 & , \text{ falls die Bedingung } A \text{ nicht erfüllt ist} \end{cases}$$

$\int \dots dt$ Lebesgue-Integral

$\int \dots dW(t)$ Ito-Integral

\mathcal{L} σ -Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen in \mathbb{R}

\mathcal{L}^d σ -Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen in \mathbb{R}^d

\mathcal{B} σ -Algebra der Borel-messbaren Mengen in \mathbb{R}

$N(\mu, \sigma^2)$ Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2

$E(X)$ Erwartungswert der Zufallsvariablen X

$E(X^p)$ p -tes Moment der Zufallsvariablen X

$E(X|\mathcal{A})$ Erwartungswert der Zufallsvariablen X bedingt auf die σ -Algebra \mathcal{A}

m. W. 1 mit Wahrscheinlichkeit 1

Eine Vielzahl weiterer Bezeichnungen werden bei ihrer erstmaligen Verwendung eingeführt.

Kapitel 1

Einführung

Der Gegenstand dieser Arbeit ist die numerische Behandlung stochastischer affiner Kontrollsysteme. Ein deterministisches Kontrollsystem im \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$, ist durch eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$dx(t) = a(x(t), u(t)) dt \quad (1.1)$$

gegeben, wobei $a : \mathbb{R}^d \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein parameterabhängiges stetiges Vektorfeld ist. Die Kontrolle wird durch die Funktion u modelliert, welche Werte in einer Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ annehmen darf. Im Allgemeinen ist u messbar und der Kontrollwertebereich U kompakt.

Wir betrachten eine stochastische Version des Systems (1.1). Dabei werden zufällige Einflüsse, denen ein Kontrollsystem in der Realität im Allgemeinen unterliegt, berücksichtigt. Die Beschreibung der zufälligen Effekte erfolgt mittels eines Wiener-Prozesses, der die Dynamik des Systems treibt. Außerdem beschränken wir uns auf affin-lineare Kontrollsysteme, d.h. die Kontrolle u geht linear in die Funktion a ein. Das zu untersuchende mathematische Objekt ist also eine stochastische Differentialgleichung

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t))u(t) dt + h(t, X(t)) dW(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.2)$$

interpretiert als stochastische Integralgleichung

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) + \int_0^t f(s, X(s)) ds + \int_0^t g(s, X(s))u(s) ds \\ &\quad + \int_0^t h(s, X(s)) dW(s), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (1.3)$$

wobei

$$\begin{aligned} f &= (f_1, \dots, f_d)^T & : & [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \\ g &= (g_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq k}} & : & [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times k} \\ h &= (h_{i,l})_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq l \leq m}} & : & [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m} \end{aligned}$$

$$W = (W_1, \dots, W_m)^T \quad : \quad m\text{-dimensionaler Wiener-Prozess.}$$

Wir nennen (1.2) ein stochastisches d -dimensionales affines Kontrollsystem mit k -dimensionaler Kontrolle und m -dimensionalem Wiener-Prozess.

Stochastische Differentialgleichungen (1.2) können nur in Ausnahmefällen explizit gelöst werden. Deshalb ist es wichtig, geeignete numerische Verfahren zu entwickeln. Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, Grundlagen zur Konstruktion von numerischen Verfahren einer beliebigen gewünschten Ordnung für Gleichungen des Typs (1.2) zu entwickeln, und, darauf basierend, einige konkrete Verfahren herzuleiten.

Dabei dienen zwei Entwicklungen der letzten Jahre als Fundament. Zum einen wurde durch Kloeden und Platen ([9]) eine systematische Theorie der numerischen Verfahren für gewöhnliche stochastische Differentialgleichungen (ohne Kontrolle) bereitgestellt. Zum anderen wurden von Grüne und Kloeden ([6]) nach einem analogen Prinzip Verfahren höherer Ordnungen zur numerischen Behandlung deterministischer affiner Kontrollsysteme (das sind Systeme (1.2) mit $h \equiv 0$) hergeleitet.

Die Schlüsselidee der beiden oben erwähnten Publikationen besteht darin, dass (sowohl im gewöhnlichen stochastischen als auch im deterministischen affin-linearen Fall) eine hinreichend oft differenzierbare Funktion bezüglich der Lösung des jeweiligen Systems im Taylorschen Sinne entwickelt werden kann. Im stochastischen Fall wird diese Tatsache stochastische Taylor-Formel genannt. Die stochastische Taylor-Formel ist eine Verallgemeinerung der stochastischen Kettenregel (*Ito-Formel*) und der deterministischen Taylor-Formel zugleich. Zur Konstruktion von numerischen Verfahren wurden die erhaltenen Taylor-Entwicklungen geeignet abgeschnitten.

In der vorliegenden Arbeit wird die Idee der stochastischen Taylor-Entwicklung auf stochastische Kontrollsysteme (1.2) ausgedehnt. Jede Ito-Taylor-Entwicklung für eine stochastische Kontrollgleichung (1.2) besteht aus einem Hauptabschnitt und einem Restterm. Der Hauptabschnitt ist eine Summe gewichteter mehrfacher Ito-Kontrollintegrale

mit Integranden 1, wobei die Gewichte durch die Koeffizienten der Gleichung und deren Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung bestimmt werden. Der Restterm enthält mehrfache Ito-Kontrollintegrale höherer Ordnung mit nichtkonstanten Integranden. Eine Ito-Taylor-Entwicklung kann im skalaren Fall $d = k = m = 1$ zum Beispiel die Form

$$\begin{aligned} X(t) = & X(0) + f(0, X(0)) \int_0^t ds + g(0, X(0)) \int_0^t u(s) ds \\ & + h(0, X(0)) \int_0^t dW(s) + \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) (0, X(0)) \int_0^t \int_0^s dW(r) dW(s) + R \end{aligned}$$

haben, wobei der Restterm R neben zweifachen auch dreifache Integrale enthält.

Um ein numerisches Verfahren einer bestimmten Güte zu erhalten, muss entschieden werden, an welcher Stelle die Ito-Taylor-Entwicklung abzuschneiden ist, d.h. welche mehrfachen Ito-Kontrollintegrale im Hauptabschnitt erhalten sein müssen. Diese Frage ist streng mit der Problemstellung und damit mit dem Fehlerkriterium verbunden. Es wird zwischen *starken* und *schwachen* Approximationen unterschieden. Unter starken Approximationen verstehen wir numerische Verfahren, die auf der Basis von Informationen über einen Pfad des Wiener-Prozesses den entsprechenden Pfad der exakten Lösung X des Systems (1.2) in diskreten Punkten approximieren. Die Güte einer starken Approximation wird anhand von Quadratmittelfehlern in den Diskretisierungspunkten beurteilt. Eine Approximation \bar{X} , die auf einer äquidistanten Diskretisierung

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$$

des Intervalls $[0, T]$ mit Schrittweite $\Delta = \frac{T}{N}$ basiert, hat die starke Ordnung $\gamma > 0$, wenn es eine positive von Δ unabhängige Konstante K gibt, derart, dass

$$\left(E |X(t_i) - \bar{X}(t_i)|_2^2 \right)^{1/2} \leq K \Delta^\gamma$$

für $i = 0, \dots, N$ erfüllt ist. Dabei bezeichnet $|\cdot|_2$ die euklidische Norm in \mathbb{R}^d .

Beruht \bar{X} auf einer Ito-Taylor-Entwicklung, so sprechen wir von einem *starken Ito-Taylor-Verfahren der Ordnung γ* für stochastische affine Kontrollsysteme.

Um zu entscheiden, welche mehrfachen Ito-Kontrollintegrale für ein starkes Verfahren der Ordnung γ im Hauptabschnitt der Ito-Taylor-Entwicklung enthalten sein müssen, markieren wir die mehrfachen Integrale durch Multiindizes. Unter dem mehrfachen

Ito-Kontrollintegral zum Multiindex $\alpha = (j_1, \dots, j_l)$ über einem Intervall $[t, t + \Delta]$ verstehen wir das Integral

$$I_{\alpha, t, t+\Delta} = \int_t^{t+\Delta} \int_t^{s_l} \dots \int_t^{s_2} dW^{j_1}(s_1) \dots dW^{j_l}(s_l)$$

mit

$$\begin{aligned} dW^0(s) &= ds \\ dW^j(s) &= u^j(s) ds \quad \text{für } j \in \{\underline{1}, \dots, \underline{k}\}, \end{aligned}$$

wobei wir durch den Unterstrich auf Komponenten der Kontrollfunktion u verweisen.

Jedem Multiindex α ordnen wir seine Länge $l(\alpha)$, die Anzahl $o(\alpha)$ der Nullkomponenten und die Anzahl $n(\alpha)$ der Komponenten mit einem Unterstrich zu. Für ein mehrfaches Ito-Kontrollintegral $I_{\alpha, t, t+\Delta}$ gibt $l(\alpha)$ also die Vielfachheit an, während $o(\alpha)$ die Integrale des Typs $\int ds$ und $n(\alpha)$ die Integrale des Typs $\int u^j(s) ds$ zählt. Die zu den mehrfachen Integralen des Hauptabschnitts korrespondierenden Multiindizes bilden eine Menge, die wegen ihrer Struktur hierarchische Menge genannt wird. Die Multiindizes der Integrale des Restterms bilden die Restmenge.

Das Hauptresultat über starke Approximationen (Theorem 3.3.1) klärt die Struktur der für die starke Ordnung γ erforderlichen hierarchischen Menge. Wir zeigen:

Wenn die hierarchische Menge \mathcal{A}_γ eines Ito-Taylor-Verfahrens gemäß

$$\mathcal{A}_\gamma := \left\{ \alpha : \quad l(\alpha) + n(\alpha) + o(\alpha) \leq 2\gamma \text{ oder} \right. \\ \left. l(\alpha) = n(\alpha) + o(\alpha) = \gamma + \frac{1}{2} \right\}$$

gewählt wird, dann hat das Verfahren die starke Ordnung γ .

Zu diesem Resultat gelangen wir mit Hilfe eines Theorems über den Zusammenhang zwischen lokalen und globalen Diskretisierungsfehlern. Wir weisen zunächst nach, dass dieses Theorem, welches für gewöhnliche stochastische Differentialgleichungen von Milstein bewiesen wurde, für stochastische affine Kontrollsysteme seine Gültigkeit behält (Theorem 3.1.1). Dies ist im Wesentlichen auf die Tatsache zurückzuführen, dass die Kontrollfunktion u als beschränkt vorausgesetzt wird. Wir verifizieren dann, dass ein

Ito-Taylor-Verfahren die Voraussetzungen dieses Theorems erfüllt, wenn \mathcal{A}_γ seine hierarchische Menge ist.

Das obige Resultat benutzen wir, um einige konkrete starke Verfahren herzuleiten. Für die allgemeine mehrdimensionale Gleichung (1.2) ($d, k, m \geq 1$) stellen wir das Euler-Verfahren, das Milstein-Verfahren, sowie das Ito-Taylor-Verfahren der starken Ordnung $\gamma = \frac{3}{2}$, inklusive seiner Version für kommutatives Rauschen zweiter Art, bereit. Dabei gehen wir im Allgemeinen nicht auf die starke Approximation der vorkommenden Ito-Kontrollintegrale ein. Dies ist ein separates Problem, das von der speziellen Kontrollfunktion u abhängt. Ein ableitungsfreies Schema schließt unsere Auswahl starker Verfahren ab.

Sind wir vor allem an Funktionalen der Lösung, z.B. an ihren Momenten, interessiert, so haben wir es mit einem Problem der *schwachen Approximation* zu tun. Dabei kommt es nicht auf pfadweise Nähe, sondern auf eine gute Approximation der Verteilung der Lösung in diskreten Punkten an. Als Fehlerkriterium wird der Absolutbetrag des Abstandes zwischen dem exakten Funktional und dem genäherten Funktional genommen. Im Hinblick auf die numerische Realisierung der Ito-Kontrollintegrale betrachten wir hier beliebige Diskretisierungen des Intervalls $[0, T]$. Eine Approximation \bar{X} , die auf einer Diskretisierung

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$$

von $[0, T]$ mit Schrittweiten $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ für $i = 0, \dots, N-1$ und maximaler Schrittweite

$$\Delta_{\max} = \max_{0 \leq i \leq N-1} (t_{i+1} - t_i)$$

basiert, hat die schwache Ordnung β , wenn zu jeder Funktion $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, die $(2\beta+2)$ -mal stetig differenzierbar und zusammen mit ihren partiellen Ableitungen bis zu und einschließlich der Ordnung $2\beta+2$ polynomial wachsend ist, eine Konstante K_g existiert, derart, dass

$$|Eg(X(t_i)) - Eg(\bar{X}(t_i))| \leq K_g \Delta_{\max}^\beta$$

für $i = 0, \dots, N$ gilt.

Schwache Ito-Taylor-Verfahren basieren auf anderen hierarchischen Mengen als starke. Das Hauptresultat über schwache Approximationen (Theorem 4.4.1) lautet:

Wenn die hierarchische Menge Γ_β eines Ito-Taylor-Verfahrens gemäß

$$\Gamma_\beta = \{\alpha : l(\alpha) \leq \beta\}$$

gewählt wird und die Ito-Kontrollintegrale $I_{\alpha, t_i, t_{i+1}}$ numerisch durch Größen

$$\bar{I}_{\alpha, t_i, t_{i+1}} = Z_\alpha \Delta_i^{\frac{1}{2}(l(\alpha) + n(\alpha) + o(\alpha))} \quad (1.4)$$

realisiert werden, mit Zufallsvariablen Z_α , deren sämtliche Momente existieren, dann hat das Verfahren die schwache Ordnung β .

Auch für dieses Resultat benutzen wir ein Theorem, das für gewöhnliche stochastische Differentialgleichungen von Milstein bewiesen wurde und direkt auf stochastische affine Kontrollsysteme übertragen werden kann (Theorem 4.1.1). Wie im starken Fall, stellt es eine Abschätzung des globalen Fehlers unter Voraussetzungen an lokale Fehler bereit. Lokale Fehler sind hier Abstände zwischen gewissen Momenten der Einschrittapproximation. Für ein Ito-Taylor-Verfahren sind die Voraussetzungen des Theorems erfüllt, wenn es auf der hierarchischen Menge Γ_β basiert. Ausgehend von diesem theoretischen Resultat entwerfen wir im allgemeinen mehrdimensionalen Fall ($d, k, m \geq 1$) konkrete Ito-Taylor-Verfahren der schwachen Ordnung $\beta = 1$ und $\beta = 2$. Dazu ist die Hauptarbeit in die Approximation der Ito-Kontrollintegrale, also in die Wahl der Zufallsvariablen Z_α in (1.4) zu investieren. Im Hinblick auf Anwendungen beschränken wir uns dabei auf Kontrollfunktionen mit stückweise glatten Komponenten. Für solche Kontrollfunktionen können wir Techniken der elementaren Numerik ausnutzen. Schließlich stellen wir, wie im starken Fall, auch ein ableitungsfreies schwaches Verfahren bereit.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Wir beginnen im Kapitel 2 mit dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz, den wir von gewöhnlichen stochastischen Differentialgleichungen auf stochastische affine Kontrollsysteme übertragen. Nachdem wir die den weiteren Untersuchungen zugrundeliegende Notation eingeführt haben, formulieren und beweisen wir die Kettenregel für stochastische affine Kontrollsysteme. Ihr Analogon für gewöhnliche stochastische Differentialgleichungen ist als *Ito-Formel* bekannt. Diese Kettenregel wird ein wichtiges Instrument bei Herleitungen und Umformungen im weiteren Verlauf der Arbeit sein. Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir die Ito-Taylor-Entwicklung für die Lösung $X(t)$ des stochastischen affinen Kontrollsystems (1.2). Diese Ito-Taylor-Entwicklung ist der Ausgangspunkt für die Herleitung von starken und schwachen Ito-Taylor-Verfahren in den nächsten Kapiteln.

Das dritte Kapitel ist den starken Approximationen gewidmet. Nach der Definition der starken Approximationen stellen wir die Bedingungen an lokale Fehler auf, die eine starke Konvergenz eines numerischen Verfahrens gewährleisten. Im Folgenden geht es

im Wesentlichen darum, die das Verfahren der starken Ordnung γ bestimmende hierarchische Menge \mathcal{A}_γ so zu wählen, dass diese Bedingungen erfüllt sind. Nachdem die richtige hierarchische Menge gefunden wurde, formulieren wir starke Ito-Taylor-Schemata der Ordnungen $\gamma = \frac{1}{2}$, 1 und $\frac{3}{2}$ sowie einige ihrer Vereinfachungen. Den Abschluss des Kapitels bilden numerische Simulationen der Trajektorien von drei verschiedenen stochastischen Kontrollsystemen.

Im Kapitel 4 werden die schwachen Approximationen untersucht. Dieses Kapitel orientiert sich im Aufbau im Wesentlichen am Kapitel 3. Nachdem die hinreichenden Bedingungen für schwache Konvergenz formuliert wurden, bestimmen wir die hierarchische Menge Γ_β , die diesen Bedingungen genügt und auf der ein schwaches Ito-Taylor-Verfahren der Ordnung β basiert. Im Unterschied zu starken Verfahren ist es im schwachen Fall möglich, eine Vorschrift zur Approximation der mehrfachen Ito-Kontrollintegrale anzugeben. Wir formulieren die numerischen Schemata der schwachen Ordnungen $\beta = 1$ und 2, sowie ein ableitungsfreies Verfahren. Zum Schluss prüfen wir numerisch die theoretisch erwartete Ordnung der Verfahren nach und illustrieren eine wichtige Anwendung der schwachen Approximationen — die Simulation des Erwartungswertes.

Das fünfte und letzte Kapitel gibt einen Ausblick über offene Probleme, die als Ausgangspunkt für weitere Überlegungen dienen könnten.

Die Arbeit enthält zahlreiche positive Konstanten, deren konkrete Struktur jedoch für die Resultate unerheblich ist. Wir verwenden deshalb und wegen besserer Lesbarkeit das Symbol K um nicht spezifizierte positive Konstanten zu bezeichnen.

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. Kloeden bedanken, der mich durch seine Vorlesungen für stochastische Differentialgleichungen zuerst begeisterte und der auch das Thema für diese Arbeit vorgeschlagen hat. Mein ganz besonderer Dank gilt Norbert Hofmann für seine sehr geduldige hervorragende Betreuung und zahlreiche spannende Gespräche und Diskussionen, die nicht nur fachlich sehr wertvoll, sondern auch motivierend und ermutigend zugleich waren. Außerdem bedanke ich mich bei Norbert Hofmann, Christine Schweinem und Arthur Böshans für das aufmerksame und zeitaufwendige Korrekturlesen und bei Yemane, dessen Hilfe darüber weit hinaus ging.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Existenz- und Eindeigkeitssatz

Wir widmen uns zunächst der Frage der Existenz- und Eindeigkeit der Lösung eines stochastischen affinen Kontrollsystems, das durch die gewöhnliche stochastische Differentialgleichung (1.2) beschrieben wird. Für deterministische affine Kontrollsysteme wird die Existenz einer eindeutigen Lösung durch den Satz von Caratheodory (siehe [13]) gesichert. Um die Existenz einer pfadweise eindeutigen starken Lösung (d.h. einer Lösung für jeden Wiener-Prozess) für gewöhnliche stochastische Differentialgleichungen zu garantieren, müssen die Koeffizientenfunktionen bestimmte Bedingungen erfüllen. Diese Tatsache, die im Theorem 4.5.3 von Kloeden und Platen in [9] formuliert wurde, verwenden wir um die Existenz und Eindeigkeit der Lösungen von Gleichung (1.2) zu zeigen. Wir benutzen dieses Resultat in folgender Form:

Theorem 2.1.1 *Gegeben sei eine stochastische Differentialgleichung*

$$dX(t) = a(t, X(t)) dt + b(t, X(t)) dW(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.1)$$

interpretiert als stochastische Integralgleichung

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s)) ds + \int_0^t b(s, X(s)) dW(s), \quad t \in [0, T], \quad (2.2)$$

wobei $W = \{W(t), \mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ einen mit einer Familie \mathcal{F}_t , $0 \leq t \leq T$ von σ -Algebren verbundenen m -dimensionalen Wiener-Prozess bezeichnet.

Es gelten die folgenden Voraussetzungen:

(i) : Die Funktionen

$$\begin{aligned} a_i & : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, d \\ b_{i,j} & : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

sind $\mathcal{L} \times \mathcal{L}^d$ -messbar in $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$.

Es existiert eine Konstante $K > 0$ mit

(ii) :

$$\begin{aligned} |a(t, x) - a(t, y)|_2 & \leq K|x - y|_2 \\ |b(t, x) - b(t, y)|_2 & \leq K|x - y|_2 \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$ und $x, y \in \mathbb{R}^d$ (Lipschitz-Bedingung)

und

(iii) :

$$\begin{aligned} |a(t, x)|_2 & \leq K(1 + |x|_2) \\ |b(t, x)|_2 & \leq K(1 + |x|_2) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$ und $x \in \mathbb{R}^d$ (lineares Wachstum).

(iv) : Die Anfangsbedingung $X(0)$ ist \mathcal{F}_0 -messbar und $E(|X(0)|_2^2) < \infty$.

Dann hat die stochastische Differentialgleichung (2.1) eine pfadweise eindeutige starke Lösung $X(t)$ auf $[0, T]$.

Um dieses Resultat auf die Gleichung (1.2) anzuwenden, schreiben wir diese in der Form

$$dX(t) = a(t, X(t)) dt + b(t, X(t)) dW(t)$$

mit

$$\begin{aligned}
 a(t, X(t)) &:= f(t, X(t)) + g(t, X(t))u(t) \\
 &= f(t, X(t)) + \sum_{j=1}^k g^{(j)}(t, X(t))u^{(j)}(t) \\
 b(t, X(t)) &:= h(t, X(t)), \\
 \text{d.h.} \quad b(t, X(t))dW(t) &= \sum_{j=1}^m h^{(j)}(t, X(t))dW^j(t).
 \end{aligned}$$

Wir fordern, daß die Annahmen (i) – (iii) des Theorems 2.1.1 für die Koeffizientenfunktionen f, g und h gelten und nehmen zusätzlich an, dass, wie im Satz von Caratheodory, die Kontrollfunktion u (Lebesgue-)messbar und ihr Wertebereich U_k kompakt ist. Unter diesen Bedingungen besitzt auch die Gleichung (1.2) eine eindeutige Lösung.

Wir verifizieren dies, indem wir zeigen, dass die Annahmen (i) – (iii) des Theorems 2.1.1 für die gemäß

$$a(t, X(t)) = f(t, X(t)) + g(t, X(t))u(t)$$

definierte Funktion $a : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ebenfalls gelten, vorausgesetzt, diese Annahmen sind für die Funktionen $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times k}$ erfüllt.

Um die $\mathcal{L} \times \mathcal{L}^d$ -Messbarkeit von

$$a_i : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, d$$

zu zeigen, betrachten wir auf dem Produktraum

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathcal{L} \times \mathcal{L}^d)$$

die Projektion π_1 auf die erste Komponente, d.h.

$$\begin{aligned}
 \pi_1 &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \\
 (t, x) &\mapsto t.
 \end{aligned}$$

π_1 ist $\mathcal{L} \times \mathcal{L}^d$ -messbar, denn für beliebiges $L \in \mathcal{L}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \pi_1^{-1}(L) &= \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : \pi_1(t, x) \in L\} \\
 &= L \times \mathbb{R}^d \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}^d.
 \end{aligned}$$

Die j -te Komponente von u kann für $j = 1, \dots, k$ in der Form

$$u^j(t) = (u^j \circ \pi_1)(t, x)$$

geschrieben werden. Für beliebige Borel-Mengen $B \subset \mathbb{R}$ ist

$$(u^j \circ \pi_1)^{-1}(B) = \pi_1^{-1} \left((u^j)^{-1}(B) \right) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}^d$$

wegen der Messbarkeit von u^j und der $\mathcal{L} \times \mathcal{L}^d$ -Messbarkeit von π_1 , d.h. $u^j \circ \pi_1$ ist $\mathcal{L} \times \mathcal{L}^d$ -messbar.

Produkte und Summen von messbaren Funktionen sind wieder messbar. Die Funktion a_i mit

$$a_i(t, x) = f_i(t, x) + \sum_{j=1}^k g_{i,j}(t, x) u^j(t)$$

ist für alle $i = 1, \dots, d$ deshalb $\mathcal{L} \times \mathcal{L}^d$ -messbar.

Die Lipschitz-Stetigkeit und das lineare Wachstum von a ergeben sich leicht aus den entsprechenden Eigenschaften von f und g und der Beschränktheit von u :

$$\begin{aligned} |a(t, x) - a(t, y)|_2 &\leq |f(t, x) - f(t, y)|_2 + |g(t, x) - g(t, y)|_2 \cdot |u(t)|_2 \\ &\leq K|x - y|_2 \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ und

$$\begin{aligned} |a(t, x)|_2 &\leq |f(t, x)|_2 + |g(t, x)|_2 \cdot |u(t)|_2 \\ &\leq K(1 + |x|_2) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Somit folgt sofort aus dem Theorem 2.1.1 der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösungen von stochastischen affinen Kontrollsystemen (1.2):

Theorem 2.1.2 *Gegeben sei ein stochastisches d -dimensionales affines Kontrollsystem*

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t))u(t) dt + h(t, X(t)) dW(t), \quad t \in [0, T] \quad (2.3)$$

mit k -dimensionaler Kontrolle u und m -dimensionalem Wiener-Prozess $W = \{W(t), \mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$.

Es seien folgende Bedingungen erfüllt:

(i) : Die Funktionen

$$\begin{aligned} f_i & : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, d \\ g_{i,j} & : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, k \\ h_{i,j} & : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

sind $\mathcal{L} \times \mathcal{L}^d$ -messbar in $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$.

Es existiert eine Konstante $K > 0$ mit

(ii) :

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)|_2 & \leq K|x - y|_2 \\ |g(t, x) - g(t, y)|_2 & \leq K|x - y|_2 \\ |h(t, x) - h(t, y)|_2 & \leq K|x - y|_2 \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$ und $x, y \in \mathbb{R}^d$ (Lipschitz-Bedingung).

und

(iii) :

$$\begin{aligned} |f(t, x)|_2 & \leq K(1 + |x|_2) \\ |g(t, x)|_2 & \leq K(1 + |x|_2) \\ |h(t, x)|_2 & \leq K(1 + |x|_2) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$ und $x \in \mathbb{R}^d$ (lineares Wachstum).

(iv) : Die Kontrollfunktion

$$u : [0, T] \rightarrow U_k \subset \mathbb{R}^k$$

ist messbar und der Wertebereich $U_k \subset \mathbb{R}^k$ ist kompakt.

(v) : Die Anfangsbedingung $X(0)$ ist \mathcal{F}_0 -messbar mit $E(|X(0)|_2^2) < \infty$.

Dann besitzt das stochastische affine Kontrollsystem eine eindeutige Lösung $X(t)$ auf $[0, T]$.

2.2 Notation

Bevor wir eine allgemeine Taylor-Entwicklung einer Funktion $F(t, X(t))$ bzgl. der Lösungen des stochastischen affinen Kontrollsystems (1.2) formulieren, führen wir hier die dazu notwendige Notation ein.

Sei k die Anzahl der Komponenten der Kontrollfunktion u und sei m die Anzahl der Komponenten des Wiener-Prozesses W . Damit wir die i -te Komponente von u von der i -ten Komponente von W besser unterscheiden können, verweisen wir auf Komponenten der Kontrollfunktion durch natürliche Zahlen mit einem Unterstrich: $\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \dots$ und auf Komponenten des Wiener-Prozesses durch natürliche Zahlen mit einem Oberstrich: $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots$

2.2.1 Multiindizes

Wir nennen einen Vektor

$$\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l)$$

mit

$$j_i \in \{0\} \cup \{\underline{1}, \dots, \underline{k}\} \cup \{\overline{1}, \dots, \overline{m}\}, \quad i = 1, \dots, l$$

Multiindex der Länge l und schreiben \odot für den Multiindex der Länge Null, also

$$l(\odot) = 0.$$

Die Menge aller solcher Multiindizes bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_{k,m}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{k,m} = & \left\{ (j_1, j_2, \dots, j_l) : j_i \in \{0\} \cup \{\underline{1}, \dots, \underline{k}\} \cup \{\overline{1}, \dots, \overline{m}\}, \right. \\ & \left. i \in \{1, \dots, l\} \text{ für } l = 1, 2, 3, \dots \right\} \cup \{\odot\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Für einen beliebigen Multiindex $\alpha = (j_1, \dots, j_l) \in \mathcal{M}_{k,m}$ mit $l(\alpha) \geq 1$ bezeichnen wir mit $-\alpha$ bzw. mit $\alpha-$ den Multiindex in $\mathcal{M}_{k,m}$, den man aus α durch Entfernen der ersten bzw. letzten Komponenten erhält, d.h.

$$\begin{aligned} -\alpha &= (j_2, \dots, j_l) \\ \alpha- &= (j_1, \dots, j_{l-1}). \end{aligned}$$

Für zwei Multiindizes $\alpha = (j_1, \dots, j_l)$, $\beta = (i_1, \dots, i_\lambda) \in \mathcal{M}_{k,m}$ definieren wir die Konkatination $*$: $\mathcal{M}_{k,m} \times \mathcal{M}_{k,m} \rightarrow \mathcal{M}_{k,m}$ durch

$$\alpha * \beta = (j_1, \dots, j_l, i_1, \dots, i_\lambda), \quad (2.5)$$

$\alpha * \beta$ ist also der Multiindex aus $\mathcal{M}_{k,m}$, der aus α und β durch ihr Zusammenfügen entsteht.

Schließlich bezeichnen wir mit $o(\alpha)$ die Anzahl der Komponenten von α , die gleich Null sind, und mit $n(\alpha)$ die Anzahl der Komponenten mit einem Unterstrich.

2.2.2 Mehrfache Ito-Kontrollintegrale

Für einen Multiindex $\alpha \in \mathcal{M}_{k,m}$, einen stochastischen Prozess $Z = \{Z(s) : 0 \leq s \leq T\}$, eine integrierbare Kontrollfunktion $u : [0, T] \rightarrow U_k$ und Integrationsgrenzen $0 \leq t_0 < t \leq T$ definieren wir das mehrfache Ito-Kontrollintegral $I_\alpha[Z(\cdot)]_{t_0,t}$ durch

$$I_\alpha[Z(\cdot)]_{t_0,t} := \begin{cases} Z(t) & \text{für } \alpha = \odot, \\ \int_{t_0}^t I_{\alpha-}[Z(\cdot)]_{t_0,s} ds & \text{für } l(\alpha) \geq 1 \text{ und } j_l = 0, \\ \int_{t_0}^t I_{\alpha-}[Z(\cdot)]_{t_0,s} \cdot u^{j_l}(s) ds & \text{für } l(\alpha) \geq 1 \text{ und } j_l \in \{\underline{1}, \dots, \underline{k}\}, \\ \int_{t_0}^t I_{\alpha-}[Z(\cdot)]_{t_0,s} dW^{j_l}(s) & \text{für } l(\alpha) \geq 1 \text{ und } j_l \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}, \end{cases} \quad (2.6)$$

vorausgesetzt, die jeweiligen Integrale existieren.

Zum Beispiel sind

$$\begin{aligned} I_\odot[Z(\cdot)]_{t_0,t} &= Z(t) \\ I_{(0)}[Z(\cdot)]_{t_0,t} &= \int_{t_0}^t Z(s) ds \\ I_{(\underline{1})}[Z(\cdot)]_{t_0,t} &= \int_{t_0}^t Z(s) u^1(s) ds \\ I_{(\underline{2})}[Z(\cdot)]_{t_0,t} &= \int_{t_0}^t Z(s) dW^2(s) \\ I_{(0,\underline{2},\underline{1})}[Z(\cdot)]_{t_0,t} &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^\rho Z(\tau) u^1(s) d\tau dW^2(\rho) ds. \end{aligned}$$

Falls $Z(t) \equiv 1$ oder falls die Anfangs- und Endzeiten t_0, t aus dem Kontext klar sind, werden wir der Einfachheit halber das mehrfache Ito-Kontrollintegral $I_\alpha[Z(\cdot)]_{t_0, t}$ mit $I_{\alpha, t}$ oder nur mit I_α abkürzen.

2.2.3 Ito-Kontroll-Koeffizientenfunktionen

Für jeden Multiindex $\alpha = (j_1, \dots, j_l) \in \mathcal{M}_{k, m}$ und eine $(l(\alpha) + o(\alpha))$ -mal stetig differenzierbare Funktion $F : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die Ito-Kontroll-Koeffizientenfunktionen F_α rekursiv durch

$$F_\alpha := \begin{cases} F & \text{für } l(\alpha) = 0, \\ L^{j_1} F_{-\alpha} & \text{für } l(\alpha) \geq 1, \end{cases} \quad (2.7)$$

wobei die Differentialoperatoren L^j folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned} L^0 &= \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^d f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{i, l=1}^d h_{i, j} h_{l, j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} \\ L^j &= \sum_{i=1}^d g_{i, j} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{für } j = 1, \dots, k \\ L^{\bar{j}} &= \sum_{i=1}^d h_{i, j} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{für } j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Für $F : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ verstehen wir unter F_α diejenige vektorwertige Funktion, deren Komponenten gemäß (2.7) definiert sind.

Im einfachsten Fall, für $d = k = m = 1$ und $F(t, x) \equiv x$, haben wir z.B.:

$$\begin{aligned} F_{(0)} &= f, & F_{(\underline{1})} &= g, & F_{(\bar{1})} &= h, \\ F_{(0, \underline{1})} &= \frac{\partial g}{\partial t} + f \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \\ F_{(\underline{1}, 0)} &= g \frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned}$$

2.2.4 Hierarchische Mengen und Restmengen

Bevor wir die stochastische Taylor-Entwicklung für affine stochastische Kontrollsysteme formulieren und sie beweisen, bemerken wir vorweg, dass diese Entwicklung mehrfache Ito-Kontrollintegrale mit konstanten Integranden enthält, die nicht willkürlich gewählt werden können. Vielmehr bilden die entsprechenden Multiindizes eine gewisse Menge, die wir hier als *hierarchisch* bezeichnen. Der Restterm der Taylor-Entwicklung enthält dann die mehrfachen Ito-Kontrollintegrale mit den Multiindizes, die zu der sogenannten *Restmenge* gehören, die ihrerseits von der hierarchischen Menge abhängt.

Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_{k,m}$ heißt *hierarchische Menge*, wenn sie die folgenden drei Eigenschaften hat:

- (i) \mathcal{A} ist nicht leer
- (ii) Die Multiindizes in \mathcal{A} sind gleichmäßig in der Länge beschränkt:

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} l(\alpha) < \infty$$

- (iii) $-\alpha \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{\odot\}$.

Gehört ein beliebiger Multiindex α zur hierarchischen Menge, so müssen gemäß (iii) auch alle Multiindizes, die aus α durch aufeinander folgendes Entfernen der ersten Komponente entstehen, zur hierarchischen Menge gehören.

Zu einer gegebenen hierarchischen Menge \mathcal{A} ist die Restmenge $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ definiert durch

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \mathcal{M}_{k,m} \setminus \mathcal{A} : -\alpha \in \mathcal{A}\}. \quad (2.9)$$

Also wird die Restmenge aus der gegebenen hierarchischen Menge gebildet, indem man den maximalen Vektoren noch eine Komponente am Anfang hinzufügt, welche alle zugelassenen Werte annehmen kann. Die Restmenge besteht somit aus allen direkten Nachfolgern von Multiindizes aus der hierarchischen Menge, die noch nicht in der hierarchischen Menge enthalten sind.

2.3 Kettenregel für stochastische affine Kontrollsysteme

Wir gehen wieder von einer gewöhnlichen stochastischen Differentialgleichung (2.1) aus, mit den Koeffizientenfunktionen a, b wie im Theorem 2.1.1.

Für eine Transformation $F : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ der Lösung $X(t)$ von (2.1), die stetig partiell differenzierbar nach t und zweimal stetig differenzierbar nach den Komponenten von x ist, gilt die folgende stochastische Kettenregel, bekannt als *Ito-Formel* (siehe Kloeden und Platen [9], Theorem 3.3.2):

$$\begin{aligned} F(t, X(t)) &= F(t_0, X(t_0)) \\ &+ \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial F}{\partial t}(s, X(s)) + \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(s, X(s)) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^d \sum_{j=1}^m b_{i,j} b_{l,j} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_l} \right)(s, X(s)) \right] ds \\ &+ \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m b_{i,j} \frac{\partial F}{\partial x_i}(s, X(s)) dW^j(s), \end{aligned}$$

mit Wahrscheinlichkeit 1, für beliebige Zeitpunkte $0 \leq t_0 \leq t \leq T$.

Wenn wir nun $a := f + g \cdot u$ und $b := h$ in die gewöhnliche stochastische Differentialgleichung (2.1) einsetzen, mit den Koeffizientenfunktionen f, g, h und der Kontrollfunktion u wie in Theorem 2.1.1, so erhalten wir das stochastische affine Kontrollsystem (1.2) und die stochastische Kettenregel sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned} F(t, X(t)) &= F(t_0, X(t_0)) + \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial F}{\partial t}(s, X(s)) + \sum_{i=1}^d \left(f_i + \sum_{j=1}^k g_{i,j} u^j \right) \frac{\partial F}{\partial x_i}(s, X(s)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^d \sum_{j=1}^m h_{i,j} h_{l,j} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_l}(s, X(s)) \right] ds \\ &+ \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m h_{i,j} \frac{\partial F}{\partial x_i}(s, X(s)) dW^j(s) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F(t_0, x(t_0)) + \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial F}{\partial t}(s, X(s)) + \sum_{i=1}^d f_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(s, X(s)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^d \sum_{j=1}^m h_{i,j} h_{l,j} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_l}(s, X(s)) \right] ds \\
&\quad + \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^d g_{i,j} u^j \frac{\partial F}{\partial x_i}(s, X(s)) ds \\
&\quad + \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^d h_{i,j} \frac{\partial F}{\partial x_i}(s, X(s)) dW^j(s).
\end{aligned}$$

Diese Kettenregel können wir mit den Bezeichnungen (2.8) noch in folgender Form formulieren:

$$\begin{aligned}
F(t, X(t)) &= F(t_0, X(t_0)) + \int_{t_0}^t L^0 F(s, X(s)) ds \\
&\quad + \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^k L^{\underline{j}} F(s, X(s)) u^j(s) ds \tag{2.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad + \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^m L^{\bar{j}} F(s, X(s)) dW^j(s) \\
&= F(t_0, X(t_0)) + I_{(0)} [L^0 F(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} \\
&\quad + \sum_{j=1}^k I_{(\underline{j})} [L^{\underline{j}} F(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} + \tag{2.11} \\
&\quad + \sum_{j=1}^m I_{(\bar{j})} [L^{\bar{j}} F(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t}.
\end{aligned}$$

2.4 Illustratives Beispiel

Wir demonstrieren zuerst den Mechanismus der Ito-Taylor-Entwicklung für den skalaren Fall, d.h. für $d = k = m = 1$. Wir betrachten dafür eine stochastische affine

Kontrolldifferentialgleichung

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t))u(t) dt + h(t, X(t)) dW(t), \quad t \in [0, T]$$

bzw. ihre Darstellung als Integralgleichung

$$\begin{aligned} X(t) = & X(0) + \int_0^t f(s, X(s)) ds \\ & + \int_0^t g(s, X(s))u(s) ds + \int_0^t h(s, X(s)) dW(s), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die Koeffizientenfunktionen $f, g, h : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllen dabei die Bedingungen (i) – (iii) des Theorems 2.1.2 und die Kontrollfunktion $u : [0, T] \rightarrow U_1 \subset \mathbb{R}$ sei messbar und ihr Wertebereich U_1 sei ein kompaktes Intervall.

Für eine genügend glatte Transformation $F : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat die Kettenregel (2.10) die Form

$$\begin{aligned} F(t, X(t)) = & F(0, X(0)) + \int_0^t L^0 F(s, X(s)) ds \\ & + \int_0^t L^1 F(s, X(s)) u(s) ds \\ & + \int_0^t L^{\bar{1}} F(s, X(s)) dW(s) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} L^0 &= \frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ L^1 &= g \frac{\partial}{\partial x}, \\ L^{\bar{1}} &= h \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Wenden wir diese Kettenregel auf jede der Koeffizientenfunktionen $F \equiv f$, $F \equiv g$ und $F \equiv h$ in der Gleichung (2.12) an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} X(t) = & X(0) + \int_0^t \left[f(0, X(0)) + \int_0^s L^0 f(r, X(r)) dr \right. \\ & \left. + \int_0^s L^1 f(r, X(r)) u(r) dr + \int_0^s L^{\bar{1}} f(r, X(r)) dW(r) \right] ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \left[g(0, X(0)) + \int_0^s L^0 g(r, X(r)) dr \right. \\
& + \left. \int_0^s L^\perp g(r, X(r)) u(r) dr + \int_0^s L^\top g(r, X(r)) dW(r) \right] u(s) ds \\
& + \int_0^t \left[h(0, X(0)) + \int_0^s L^0 h(r, X(r)) dr \right. \\
& + \left. \int_0^s L^\perp h(r, X(r)) u(r) dr + \int_0^s L^\top h(r, X(r)) dW(r) \right] dW(s) \\
& = X(0) + f(0, X(0)) \int_0^t ds + g(0, X(0)) \int_0^t u(s) ds \\
& + h(0, X(0)) \int_0^t dW(s) + R
\end{aligned}$$

mit dem Restterm

$$\begin{aligned}
R &= \int_0^t \int_0^s L^0 f(r, X(r)) dr ds + \int_0^t \int_0^s L^\perp f(r, X(r)) u(r) dr ds \\
&+ \int_0^t \int_0^s L^\top f(r, X(r)) dW(r) ds + \int_0^t \int_0^s L^0 g(r, X(r)) u(s) dr ds \\
&+ \int_0^t \int_0^s L^\perp g(r, X(r)) u(r) u(s) dr ds + \int_0^t \int_0^s L^\top g(r, X(r)) u(s) dW(r) ds \\
&+ \int_0^t \int_0^s L^0 h(r, X(r)) dr dW(s) + \int_0^t \int_0^s L^\perp h(r, X(r)) u(r) dr dW(s) \\
&+ \int_0^t \int_0^s L^\top h(r, X(r)) dW(r) dW(s).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Das ist die einfachste nichttriviale Ito-Taylor-Entwicklung der stochastischen Kontrollgleichung (2.12). Wir können dieses Verfahren fortsetzen, indem wir z.B. die Kettenregel (2.10) auf $F = L^\top h$ im Restterm (2.13) anwenden. Wir bekommen dann

$$\begin{aligned}
X(t) &= X(0) + f(0, X(0)) \int_0^t ds + g(0, X(0)) \int_0^t u(s) ds \\
&+ h(0, X(0)) \int_0^t dW(s) + L^\top h(0, X(0)) \cdot \int_0^t \int_0^s dW(r) dW(s) + R^*
\end{aligned} \tag{2.14}$$

mit dem Restterm R^* , der neben den zweifachen auch dreifache Integrale enthält. An (2.14) lassen sich schon die wichtigsten Eigenschaften der Ito-Taylor-Entwicklung

für stochastische affine Kontrollsysteme erkennen. Die Entwicklung (2.14) enthält die mehrfachen Ito-Kontrollintegrale

$$\int ds, \quad \int u(s) ds, \quad \int dW(s), \quad \iint dW(r)dW(s).$$

Die dazugehörigen Multiindizes (0) , $(\underline{1})$, $(\bar{1})$, $(\bar{1}, \bar{1})$ (vereinigt mit $\{\odot\}$) bilden eine hierarchische Menge in $\mathcal{M}_{1,1}$. Wir haben einen Restterm, der die „nächsten“ Ito-Kontrollintegrale, allerdings mit nicht konstanten Integranden, enthält. Die dazugehörigen Multiindizes bilden die entsprechende Restmenge. Diese Beobachtung läßt sich für eine allgemeine Funktion F und eine beliebig hohe Ordnung formulieren.

2.5 Die Ito-Taylor-Entwicklung für stochastische affine Kontrollsysteme

Wir formulieren und beweisen nun die Ito-Taylor-Entwicklung für die Lösung $X(t)$ eines d -dimensionalen stochastischen affinen Kontrollsystems (1.2) und benutzen hierzu die Notation aus dem Abschnitt 2.2.

Satz 2.5.1 *Sei $F : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_{k,m}$ eine hierarchische Menge und $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ ihre Restmenge. Dann gilt die Ito-Taylor-Entwicklung*

$$\begin{aligned} F(t, X(t)) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} I_{\alpha}[F_{\alpha}(t_0, X(t_0))]_{t_0, t} \\ &+ \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{A})} I_{\alpha}[F_{\alpha}(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t}, \quad 0 \leq t_0 \leq t \leq T, \end{aligned} \tag{2.15}$$

vorausgesetzt, es existieren alle in (2.15) vorkommenden partiellen Ableitungen von F und von den Komponenten von f , g und h und alle in (2.15) vorkommenden mehrfachen Ito-Kontrollintegrale.

Im Beweis vom Satz 2.5.1 benötigen wir das folgende

Lemma 2.5.2 Sei $F : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ und seien $\alpha, \gamma \in \mathcal{M}_{k,m}$ mit $l(\gamma) \geq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} I_\alpha [F_\gamma(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} &= I_\alpha [F_\gamma(t_0, X(t_0))]_{t_0, t} + I_{(0)*\alpha} [F_{(0)*\gamma}(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} \\ &\quad + \sum_{j=1}^k I_{(\underline{j})*\alpha} [F_{(\underline{j})*\gamma}(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} + \sum_{j=1}^m I_{(\bar{j})*\alpha} [F_{(\bar{j})*\gamma}(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} \end{aligned}$$

für $0 \leq t_0 \leq t \leq T$.

Beweis: Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über die Länge von α .

Sei $l(\alpha) = 0$. Dann ist $\alpha = \odot$. Mit der Version (2.11) der Kettenregel für stochastische affine Kontrollsysteme und mit der Definition der Ito-Kontroll-Koeffizienten-funktionen (2.8) haben wir in diesem Fall:

$$\begin{aligned} I_\alpha [F_\gamma(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} &= F_\gamma(t, X(t)) \\ &= F_\gamma(t_0, X(t_0)) + I_{(0)} [L^0 F_\gamma(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} \\ &\quad + \sum_{j=1}^k I_{(\underline{j})} [L^{\underline{j}} F_\gamma(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} + \sum_{j=1}^m I_{(\bar{j})} [L^{\bar{j}} F_\gamma(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} \\ &= F_\gamma(t_0, X(t_0)) + I_{(0)} [F_{(0)*\gamma}(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} \\ &\quad + \sum_{j=1}^k I_{(\underline{j})} [F_{(\underline{j})*\gamma}(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} + \sum_{j=1}^m I_{(\bar{j})} [F_{(\bar{j})*\gamma}(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t}. \end{aligned}$$

Da das Zusammenfügen mit $\alpha = \odot$ jeden Multiindex invariant läßt, folgt in diesem Fall die Behauptung.

Sei nun $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} I_\beta [F_\gamma(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} &= I_{(\beta_r)} [I_{\beta_-} [F_\gamma(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, \cdot}]_{t_0, t} \\ &= I_{(\beta_r)} [I_{\beta_-} [F_\gamma(t_0, X(t_0))]_{t_0, \cdot} + I_{(0)*\beta_-} [F_{(0)*\gamma}(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, \cdot} \\ &\quad + \sum_{j=1}^k I_{(\underline{j})*\beta_-} [F_{(\underline{j})*\gamma}(\cdot, X(\cdot))]_{t_0, \cdot} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^m I_{(\bar{j}) * \beta -} \left[F_{(\bar{j}) * \gamma} (\cdot, X(\cdot)) \right]_{t_0, \cdot} \Bigg]_{t_0, t} \\
& = I_{\beta} [F_{\gamma} (t_0, X(t_0))]_{t_0, t} + I_{(0) * \beta} [F_{(0) * \gamma} (\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} \\
& + \sum_{j=1}^k I_{(\underline{j}) * \beta} [F_{(\underline{j}) * \gamma} (\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} + \sum_{j=1}^m I_{(\bar{j}) * \beta} [F_{(\bar{j}) * \gamma} (\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t},
\end{aligned}$$

was den Beweis des Lemmas beendet. \square

Nun zum

Beweis vom Satz 2.5.1: Wir orientieren uns am Beweis der Ito-Taylor-Entwicklung für gewöhnliche stochastische Differentialgleichungen (siehe Kloeden und Platen [9], Theorem 5.5.1). Wir führen diesen Beweis induktiv über $n := \max_{\alpha \in \mathcal{A}} l(\alpha)$.

Für $n = 0$ ist $\mathcal{A} = \{\odot\}$ die hierarchische Menge und

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \{(0), (\underline{1}), \dots, (\underline{k}), (\bar{1}), \dots, (\bar{m})\}$$

die zugehörige Restmenge. Damit folgt die Behauptung des Satzes direkt aus der Version (2.11) der Kettenregel für stochastische affine Kontrollsysteme.

Aus der Induktionsannahme folgt insbesondere, dass für die hierarchische Menge $\mathcal{E} := \{\alpha \in \mathcal{A} : l(\alpha) \leq n - 1\}$ die Entwicklung

$$F(t, X(t)) = \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} I_{\alpha} [F_{\alpha} (t_0, X(t_0))]_{t_0, t} + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{E})} I_{\alpha} [F_{\alpha} (\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} \quad (2.16)$$

gilt.

Aus der Definition (2.9) der Restmenge folgt, dass $\mathcal{A} \setminus \mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{E})$ und damit können wir (2.16) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}
F(t, X(t)) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} I_{\alpha} [F_{\alpha} (t_0, X(t_0))]_{t_0, t} + \sum_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}} I_{\alpha} [F_{\alpha} (\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} \\
&+ \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{E}) \setminus (\mathcal{A} \setminus \mathcal{E})} I_{\alpha} [F_{\alpha} (\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t}.
\end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden folgt mit Lemma 2.5.2

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}} I_{\alpha} [F_{\alpha} (\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}} \left(I_{\alpha} [F_{\alpha} (t_0, X(t_0))]_{t_0, t} + I_{(0)*\alpha} [F_{(0)*\alpha} (\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^k I_{(\underline{j})*\alpha} [F_{(\underline{j})*\alpha} (\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} + \sum_{j=1}^m I_{(\bar{j})*\alpha} [F_{(\bar{j})*\alpha} (\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} \right),
\end{aligned}$$

und somit gilt

$$\begin{aligned}
F(t, X(t)) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} I_{\alpha} [F_{\alpha} (t_0, X(t_0))]_{t_0, t} + \sum_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{E}} I_{\alpha} [F_{\alpha} (t_0, X(t_0))]_{t_0, t} \\
&\quad + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_1} I_{\alpha} [F_{\alpha} (\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t} \\
&= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} I_{\alpha} [F_{\alpha} (t_0, X(t_0))]_{t_0, t} + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_1} I_{\alpha} [F_{\alpha} (\cdot, X(\cdot))]_{t_0, t},
\end{aligned}$$

wobei, wegen der Definition der Restmenge (2.9), $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}(\mathcal{A})$ ist.

Damit ist der Satz 2.5.1 bewiesen. □

Kapitel 3

Starke Approximationen

Nun kommen wir zu der Frage, wie aus den abgeschnittenen Ito-Taylor-Entwicklungen für stochastische affine Kontrollsysteme konkrete numerische Verfahren einer bestimmten „Güte“ entstehen. Dabei ist es wichtig, genau zu definieren, was wir unter der Güte eines numerischen Verfahrens verstehen und nach welchen Kriterien wir diese Güte beurteilen wollen.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den sogenannten starken Approximationen. Bevor wir diese exakt definieren, führen wir die Notation ein, die wir in den nächsten Abschnitten benutzen. Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, \mathcal{F}_t , $0 \leq t \leq T$ eine Familie von Unter- σ -Algebren von \mathcal{F} und

$$W = \{W(t), \mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$$

ein Wiener-Prozess auf (Ω, \mathcal{F}, P) .

Wir betrachten nach wie vor das stochastische affine Kontrollsystem (1.2):

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t))u(t) dt + h(t, X(t)) dW(t).$$

Es ist für unsere Zwecke bequemer, dieses System in folgender Form zu schreiben

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt + \sum_{j=1}^k g^{(j)}(t, X(t))u^j(t) dt + \sum_{r=1}^m h^{(r)}(t, X(t)) dW^r(t).$$

Wir schreiben X für die exakte Lösung des Systems (1.2) und \bar{X} für eine Approximation. Der Einfachheit halber betrachten wir eine äquidistante Diskretisierung des Zeitintervalls $[0, T]$ mit Diskretisierungspunkten

$$t_0 = 0, \quad t_{i+1} = t_i + \Delta \quad \text{für } i = 0, \dots, N-1$$

und Schrittweite $\Delta = \frac{T}{N} \leq 1$.

Für eine Approximation der Lösung an der Stelle t_i schreiben wir $\bar{X}(t_i)$ oder einfach \bar{X}_i . Für den Startwert \bar{X}_0 setzen wir $\bar{X}_0 = X_0 := X(0)$. Ferner bezeichnen wir, falls Y ein \mathcal{F}_{t_i} -messbarer Zufallsvektor mit $E|Y|_2^2 < \infty$ ist, mit $X_{t_i, Y}(t)$ die Lösung des Systems (1.2) für $t_i \leq t \leq T$, die in t_i die Anfangsbedingung $X(t_i) = Y$ erfüllt. Mit $\bar{X}_{t_i, Y}(t_j)$, $t_j \geq t_i$ bezeichnen wir eine Approximation der Lösung im j -ten Schritt, die $\bar{X}_i = Y$ erfüllt. Insbesondere ergibt sich somit $\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_{t_i, \bar{X}_i}(t_{i+1})$.

Wie bisher schreiben wir $|\cdot|_2$ für die Euklidische Norm in \mathbb{R}^d . Für eine kompaktere Schreibweise bezeichnen wir das Skalarprodukt von zwei Vektoren v und w in \mathbb{R}^d einfach mit vw .

Wie bereits angekündigt, widmen wir uns in diesem Kapitel starken Approximationen. Näherungen dieser Art werden verwendet, wenn die exakte Lösung des stochastischen affinen Kontrollsystems selbst von besonderem Interesse ist, z.B. bei direkten Simulationen oder Filter-Aufgaben. In diesem Fall ist es wichtig, dass die Trajektorien der Approximationen nah bei der Trajektorie der Lösung liegen. Um das formal auszudrücken: Wir sagen, eine Approximation \bar{X} mit der Schrittweite Δ hat die starke Ordnung $\gamma > 0$, wenn es eine positive, von Δ unabhängige Konstante K gibt, derart, dass

$$\left(E|X(t_i) - \bar{X}_i|_2^2\right)^{1/2} \leq K\Delta^\gamma \quad (3.1)$$

für $i = 0, \dots, N$.

Ein numerisches Verfahren auf der Basis einer abgeschnittenen Ito-Taylor-Entwicklung, das obiges Kriterium erfüllt, nennen wir ein *starkes Ito-Taylor-Verfahren der Ordnung γ für stochastische affine Kontrollsysteme*.

3.1 Über den Zusammenhang zwischen lokalem und globalem Diskretisierungsfehler

Zur Konstruktion eines Ito-Taylor-Verfahrens muß in Abhängigkeit von der gewünschten starken Ordnung γ entschieden werden, an welcher Stelle die Ito-Taylor-Entwicklung abzuschneiden ist, d.h. wie die hierarchische Menge zur Berechnung der Terme mit konstanten Integranden aussehen muß. Um dieses Problem zu lösen, verschaffen wir uns zunächst in diesem Abschnitt ein Werkzeug, mit dem wir unter gewissen Voraussetzungen an Fehlern der Einschrittapproximation (lokale Fehler) den globalen Diskretisierungsfehler (also den Fehler des Verfahrens im Endpunkt) abschätzen können. Die zentrale Rolle spielt dabei das folgende Theorem, das für $u \equiv 0$, also für gewöhnliche stochastische Systeme bei Milstein in [10] zu finden ist. Mit Hilfe dieses Theorems können wir später nicht nur die Quadratmittelkonvergenz eines numerischen Verfahrens nachprüfen, sondern auch die Ordnung dieser Konvergenz bestimmen.

Theorem 3.1.1 *Gegeben sei ein numerisches Verfahren, dessen Einschrittapproximation $\overline{X}_{t,x}(t + \Delta)$ bezüglich des mittleren Fehlers die Fehlerordnung p_1 und bezüglich des Quadratmittelfehlers die Fehlerordnung p_2 besitzt, d.h. für $t \in [0, T - \Delta]$, $x \in \mathbb{R}^d$ gelten die folgenden Ungleichungen:*

$$\left| E \left(X_{t,x}(t + \Delta) - \overline{X}_{t,x}(t + \Delta) \right) \right|_2 \leq K \left(1 + |x|_2^2 \right)^{1/2} \Delta^{p_1}, \quad (3.2)$$

$$\left(E \left| X_{t,x}(t + \Delta) - \overline{X}_{t,x}(t + \Delta) \right|_2^2 \right)^{1/2} \leq K \left(1 + |x|_2^2 \right)^{1/2} \Delta^{p_2}. \quad (3.3)$$

Ferner sei

$$p_2 \geq \frac{1}{2}, \quad p_1 \geq p_2 + \frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

Dann gilt für $i = 0, 1, \dots, N$

$$\left(E \left| X_{t_0, X_0}(t_i) - \overline{X}_{t_0, X_0}(t_i) \right|_2^2 \right)^{1/2} \leq K \left(1 + E|X_0|_2^2 \right)^{1/2} \Delta^{p_2 - \frac{1}{2}}, \quad (3.5)$$

d.h. die Fehlerordnung des numerischen Verfahrens mit der Einschrittapproximation $\overline{X}_{t,x}(t + \Delta)$ ist $p = p_2 - \frac{1}{2}$.

Für den Beweis von Theorem 3.1.1 benötigen wir die folgenden drei Lemmata:

Lemma 3.1.2 *Es existiert eine Darstellung*

$$X_{t,x}(t + \Delta) - X_{t,y}(t + \Delta) = x - y + Z, \quad (3.6)$$

für die gilt:

$$E|X_{t,x}(t + \Delta) - X_{t,y}(t + \Delta)|_2^2 \leq |x - y|_2^2(1 + K\Delta) \quad (3.7)$$

und

$$EZ^2 \leq K|x - y|_2^2\Delta. \quad (3.8)$$

Beweis: Wir beweisen zuerst die Ungleichung (3.7). Wir erinnern daran, dass im Folgenden mit xy für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^d$ ihr Skalarprodukt gemeint ist.

Für $\theta \in [0, \Delta]$ gilt:

$$\begin{aligned} X_{t,x}(t + \theta) - X_{t,y}(t + \theta) = & \\ & x - y + \int_t^{t+\theta} (f(s, X_{t,x}(s)) - f(s, X_{t,y}(s))) ds \\ & + \sum_{j=1}^k \int_t^{t+\theta} (g^{(j)}(s, X_{t,x}(s)) - g^{(j)}(s, X_{t,y}(s))) u^j(s) ds \\ & + \sum_{r=1}^m \int_t^{t+\theta} (h^{(r)}(s, X_{t,x}(s)) - h^{(r)}(s, X_{t,y}(s))) dW^r(s). \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel für stochastische affine Kontrollsysteme (2.10) ergibt sich:

$$\begin{aligned} (X_{t,x}(t + \theta) - X_{t,y}(t + \theta))^2 = & \\ & (x - y)^2 + \int_t^{t+\theta} (f(s, X_{t,x}(s)) - f(s, X_{t,y}(s))) \cdot 2(X_{t,x}(s) - X_{t,y}(s)) ds \\ & + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \int_t^{t+\theta} (h^{(r)}(s, X_{t,x}(s)) - h^{(r)}(s, X_{t,y}(s)))^2 \cdot 2 ds \\ & + \sum_{j=1}^k \int_t^{t+\theta} (g^{(j)}(s, X_{t,x}(s)) - g^{(j)}(s, X_{t,y}(s))) \cdot 2(X_{t,x}(s) - X_{t,y}(s)) u^j(s) ds \\ & + \sum_{r=1}^m \int_t^{t+\theta} (h^{(r)}(s, X_{t,x}(s)) - h^{(r)}(s, X_{t,y}(s))) \cdot 2(X_{t,x}(s) - X_{t,y}(s)) dW^r(s). \end{aligned}$$

Da der Erwartungswert von stochastischen Integralen gleich Null ist, folgt:

$$\begin{aligned}
& E|X_{t,x}(t+\theta) - X_{t,y}(t+\theta)|_2^2 = \\
& |x - y|_2^2 + 2E \int_t^{t+\theta} ((X_{t,x}(s) - X_{t,y}(s)) (f(s, X_{t,x}(s)) - f(s, X_{t,y}(s)))) ds \\
& + 2E \int_t^{t+\theta} \sum_{j=1}^k ((X_{t,x}(s) - X_{t,y}(s)) (g^{(j)}(s, X_{t,x}(s)) - g^{(j)}(s, X_{t,y}(s)))) u^j(s) ds \\
& + E \int_t^{t+\theta} \sum_{r=1}^m |h^{(r)}(s, X_{t,x}(s)) - h^{(r)}(s, X_{t,y}(s))|_2^2 ds \\
& \leq |x - y|_2^2 + 2E \int_t^{t+\theta} |(X_{t,x}(s) - X_{t,y}(s))|_2 \cdot |f(s, X_{t,x}(s)) - f(s, X_{t,y}(s))|_2 ds + \\
& + 2E \int_t^{t+\theta} \sum_{j=1}^k |(X_{t,x}(s) - X_{t,y}(s))|_2 \cdot |g^{(j)}(s, X_{t,x}(s)) - g^{(j)}(s, X_{t,y}(s))|_2 \cdot |u^j(s)| ds \\
& + E \int_t^{t+\theta} \sum_{r=1}^m |h^{(r)}(s, X_{t,x}(s)) - h^{(r)}(s, X_{t,y}(s))|_2^2 ds.
\end{aligned}$$

Da die Funktionen $f, g^{(j)}$ für $j = 1, \dots, k$ und $h^{(r)}$ für $r = 1, \dots, m$ Lipschitz-stetig und die Funktionen u^j für $j = 1, \dots, k$ beschränkt sind, folgt leicht:

$$\begin{aligned}
& E|X_{t,x}(t+\theta) - X_{t,y}(t+\theta)|_2^2 \\
& \leq |x - y|_2^2 + K \int_t^{t+\theta} E|X_{t,x}(s) - X_{t,y}(s)|_2^2 ds.
\end{aligned}$$

Mit der Gronwall-Ungleichung erhaltenen wir

$$E|X_{t,x}(t+\theta) - X_{t,y}(t+\theta)|_2^2 \leq |x - y|_2^2 \cdot e^{K\Delta}, \quad (3.9)$$

und da $\Delta \leq 1$ vorausgesetzt wurde, ergibt sich die gewünschte Abschätzung (3.7):

$$E|X_{t,x}(t+\Delta) - X_{t,y}(t+\Delta)|_2^2 \leq |x - y|_2^2 \cdot (1 + K\Delta).$$

Nun zur Ungleichung (3.8). Für Z^2 gilt:

$$Z^2 = \left(\int_t^{t+\Delta} (f(s, X_{t,x}(s)) - f(s, X_{t,y}(s))) ds + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^k \int_t^{t+\Delta} (g^{(j)}(s, X_{t,x}(s)) - g^{(j)}(s, X_{t,y}(s))) u^j(s) ds \\
& + \sum_{r=1}^m \int_t^{t+\Delta} (h^{(r)}(s, X_{t,x}(s)) - h^{(r)}(s, X_{t,y}(s))) dW^r(s) \Big)^2 \\
\leq & K \left[\left(\int_t^{t+\Delta} (f(s, X_{t,x}(s)) - f(s, X_{t,y}(s))) ds \right)^2 \right. \\
& + \left(\sum_{j=1}^k \int_t^{t+\Delta} (g^{(j)}(s, X_{t,x}(s)) - g^{(j)}(s, X_{t,y}(s))) u^j(s) ds \right)^2 \\
& \left. + \left(\sum_{r=1}^m \int_t^{t+\Delta} (h^{(r)}(s, X_{t,x}(s)) - h^{(r)}(s, X_{t,y}(s))) dW^r(s) \right)^2 \right]. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Für den ersten Summanden in (3.10) folgt mit der Hölder-Ungleichung und wegen der Lipschitz-Stetigkeit von f

$$\begin{aligned}
& \left(\int_t^{t+\Delta} (f(s, X_{t,x}(s)) - f(s, X_{t,y}(s))) ds \right)^2 \\
& = \left(\int_t^{t+\Delta} (f(s, X_{t,x}(s)) - f(s, X_{t,y}(s))) \cdot 1 ds \right)^2 \\
& \leq \int_t^{t+\Delta} (f(s, X_{t,x}(s)) - f(s, X_{t,y}(s)))^2 ds \cdot \Delta \\
& \leq K \int_t^{t+\Delta} |X_{t,x}(s) - X_{t,y}(s)|_2^2 ds \cdot \Delta,
\end{aligned}$$

und mit der Abschätzung (3.9) folgern wir

$$\begin{aligned}
E \left[\left(\int_t^{t+\Delta} (f(s, X_{t,x}(s)) - f(s, X_{t,y}(s))) ds \right)^2 \right] & \leq K e^{KT} |x - y|_2^2 \cdot \Delta^2 \\
& = K |x - y|_2^2 \Delta^2. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden in (3.10) ergibt sich

$$\left(\sum_{j=1}^k \int_t^{t+\Delta} (g^{(j)}(s, X_{t,x}(s)) - g^{(j)}(s, X_{t,y}(s))) u^j(s) ds \right)^2 \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq K \sum_{j=1}^k \left(\int_t^{t+\Delta} (g^{(j)}(s, X_{t,x}(s)) - g^{(j)}(s, X_{t,y}(s))) u^j(s) ds \right)^2 \\
&\leq K \sum_{j=1}^k \left(\int_t^{t+\Delta} (g^{(j)}(s, X_{t,x}(s)) - g^{(j)}(s, X_{t,y}(s)))^2 ds \cdot \int_t^{t+\Delta} (u^j(s))^2 ds \right) \\
&\leq K \int_t^{t+\Delta} |X_{t,x}(s) - X_{t,y}(s)|_2^2 ds \cdot \Delta,
\end{aligned}$$

und für dessen Erwartungswert

$$\begin{aligned}
&E \left[\left(\sum_{j=1}^k \int_t^{t+\Delta} (g^{(j)}(s, X_{t,x}(s)) - g^{(j)}(s, X_{t,y}(s))) u^j(s) ds \right)^2 \right] \\
&\leq K \int_t^{t+\Delta} |x - y|_2^2 e^{K\Delta} ds \cdot \Delta \\
&\leq K \cdot e^{KT} |x - y|_2^2 \cdot \Delta^2 \\
&= K |x - y|_2^2 \cdot \Delta^2.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Für den dritten Summanden in (3.10) folgt

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{r=1}^m \int_t^{t+\Delta} (h^{(r)}(s, X_{t,x}(s)) - h^{(r)}(s, X_{t,y}(s))) dW^r(s) \right)^2 \\
&\leq K \sum_{r=1}^m \left(\int_t^{t+\Delta} (h^{(r)}(s, X_{t,x}(s)) - h^{(r)}(s, X_{t,y}(s))) dW^r(s) \right)^2
\end{aligned}$$

und unter Ausnutzung der Ito-Isometrie

$$\begin{aligned}
&E \left[\left(\sum_{r=1}^m \int_t^{t+\Delta} (h^{(r)}(s, X_{t,x}(s)) - h^{(r)}(s, X_{t,y}(s))) dW^r(s) \right)^2 \right] \\
&\leq K \int_t^{t+\Delta} |x - y|_2^2 e^{K\Delta} ds \\
&\leq K \cdot e^{KT} |x - y|_2^2 \cdot \Delta \\
&= K |x - y|_2^2 \cdot \Delta.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Aus Abschätzungen (3.10), (3.11), (3.12) und (3.13) folgt für EZ^2 :

$$EZ^2 \leq K |x - y|_2^2 \cdot \Delta.$$

Das Lemma ist somit bewiesen. \square

Lemma 3.1.3 *Für alle natürlichen Zahlen N und alle $k = 0, \dots, N$ gilt die folgende Ungleichung:*

$$E|\overline{X}_k|_2^2 \leq K (1 + E|X_0|_2^2). \quad (3.14)$$

Die spezielle Struktur von stochastischen affinen Kontrollsystemen geht in diesen Beweis nicht ein, er kann daher im Wesentlichen von Milstein ([10], Lemma 1.2) übernommen werden, wo ein analoges Resultat für gewöhnliche stochastische Systeme gezeigt wird. In diesem Beweis wird allerdings eine Tatsache benutzt, die wir für stochastische affine Kontrollsysteme gesondert verifizieren müssen:

Lemma 3.1.4 *Ist ξ eine von dem Wienerprozess W unabhängige \mathbb{R}^d -wertige \mathcal{F}_{t_0} -messbare Zufallsvariable mit einem endlichen zweiten Moment, d.h.*

$$E|\xi|_2^2 < \infty,$$

dann gilt für alle $t \in [t_0, T]$:

$$E|X(t)|_2^2 \leq (1 + E|\xi|_2^2) \cdot e^{K(t-t_0)}, \quad (3.15)$$

d.h. die Lösung des stochastischen affinen Kontrollsystems (1.2) mit der Anfangsbedingung $X(t_0) = \xi$ besitzt für alle t mit $0 \leq t_0 \leq t \leq T$ ein beschränktes zweites Moment.

Beweis: Wir betrachten den stochastischen Prozess $Z(t) := |X(t)|_2^2$.

Mit der Kettenregel (2.10) erhalten wir die Integralgleichung:

$$\begin{aligned} |X(t)|_2^2 &= |\xi|_2^2 + \int_{t_0}^t 2X(s)f(s, X(s)) ds + \\ &+ \int_{t_0}^t \sum_{r=1}^m \frac{1}{2} h^{(r)}(s, X(s)) h^{(r)}(s, X(s)) \cdot 2 ds \\ &+ \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^k g^{(j)}(s, X(s)) \cdot 2X(s) u^j(s) ds \\ &+ \int_{t_0}^t \sum_{r=1}^m h^{(r)}(s, X(s)) \cdot 2X(s) dW_r(s), \end{aligned}$$

und durch Erwartungwertbildung

$$\begin{aligned}
E|X(t)|_2^2 &= E|\xi|_2^2 + 2 \int_{t_0}^t E(X(s)f(s, X(s))) ds \\
&\quad + \sum_{r=1}^m \int_{t_0}^t E|h^{(r)}(s, X(s))|_2^2 ds \\
&\quad + 2 \sum_{j=1}^k \int_{t_0}^t E(X(s)g^{(j)}(s, X(s)) u^j(s)) ds.
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die einzelnen Summanden. Für den zweiten Summanden gilt:

$$\begin{aligned}
X(s)f(s, X(s)) &= \sum_{l=1}^d X_l(s)f_l(s, X(s)) \\
&\leq \sum_{l=1}^d |X_l(s)| \cdot |f_l(s, X(s))| \\
&\leq \sum_{l=1}^d |X_l(s)|_2 \cdot |f_l(s, X(s))|_2 \\
&\leq K(1 + |X(s)|_2)^2 \leq K(1 + |X(s)|_2^2),
\end{aligned}$$

wobei hier das lineare Wachstum von f benutzt wurde.

Damit folgt:

$$2 \int_{t_0}^t E(X(s)f(s, X(s))) ds \leq K \int_{t_0}^t (1 + E|X(s)|_2^2) ds.$$

Aus dem linearen Wachstum von $g^{(j)}$ und Beschränktheit von u^j für $j = 1, \dots, k$ folgt ganz analog für den vierten Summanden:

$$2 \sum_{j=1}^k \int_{t_0}^t E(X(s)g^{(j)}(s, X(s))) \cdot u^j(s) ds \leq K \int_{t_0}^t (1 + E|X(s)|_2^2) ds.$$

Letztendlich ergibt sich als Konsequenz des linearen Wachstums von $h^{(r)}$ für $r = 1, \dots, m$ auch für den dritten Summand:

$$\sum_{r=1}^m \int_{t_0}^t E|h^{(r)}(s, X(s))|_2^2 ds \leq K \int_{t_0}^t (1 + E|X(s)|_2^2) ds.$$

Also folgt für $E|X(t)|_2^2$:

$$\begin{aligned} E|X(t)|_2^2 &\leq E|\xi|_2^2 + K \int_{t_0}^t (1 + E|X(s)|_2^2) ds \\ &= E|\xi|_2^2 + K(t - t_0) + K \int_{t_0}^t E|X(s)|_2^2 ds. \end{aligned}$$

Auf diese Ungleichung können wir nun das Lemma von Gronwall anwenden und erhalten:

$$E|X(t)|_2^2 \leq E|\xi|_2^2 + K(t - t_0) + K \int_{t_0}^t e^{K(t-s)} (E|\xi|_2^2 + K(s - t_0)) ds.$$

Nach partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} E|X(t)|_2^2 &\leq E|\xi|_2^2 + K(t - t_0) + E|\xi|_2^2 \cdot e^{K(t-t_0)} - E|\xi|_2^2 - K(t - t_0) - 1 + e^{K(t-t_0)} \\ &= e^{K(t-t_0)} (E|\xi|_2^2 + 1) - 1 \\ &\leq e^{K(t-t_0)} (E|\xi|_2^2 + 1). \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma 3.1.4 bewiesen. \square

Analog wird auch die folgende Abschätzung bewiesen, die ebenfalls im Beweis vom Lemma 3.1.3 benutzt wird:

$$E \left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |X(t)|_2^2 \right) \leq K(1 + E|X(t_0)|_2^2). \quad (3.16)$$

Mit den Lemmata 3.1.2 – 3.1.4 wird das zentrale Theorem 3.1.1 bewiesen. Ähnlich wie beim Lemma 3.1.3 verläuft der Beweis weitestgehend analog zu dem Beweis von Theorem 1.1 von Milstein in [10], denn die spezielle Struktur von stochastischen affinen Kontrollsystemen wird hier wieder nicht benötigt. Vielmehr benutzt man die Abschätzungen (3.2), (3.3) aus der Voraussetzung des Theorems 3.1.1 und (3.7) – (3.14) aus den Lemmata 3.1.2 und 3.1.3 bzw. ihre bedingten Versionen, in denen die deterministischen Variablen x und y durch \mathcal{F}_t -messbare Zufallsvariablen ersetzt werden. Als Ausgangspunkt dient die Beobachtung, dass der Abstand zwischen X und \bar{X} im Diskretisierungspunkt t_{i+1} in der Form

$$\begin{aligned} X_{t_0, X_0}(t_{i+1}) - \bar{X}_{t_0, X_0}(t_{i+1}) &= X_{t_i, X(t_i)}(t_{i+1}) - \bar{X}_{t_i, \bar{X}_i}(t_{i+1}) \\ &= (X_{t_i, X(t_i)}(t_{i+1}) - X_{t_i, \bar{X}_i}(t_{i+1})) \\ &\quad + (X_{t_i, \bar{X}_i}(t_{i+1}) - \bar{X}_{t_i, \bar{X}_i}(t_{i+1})) \end{aligned}$$

geschrieben werden kann.

3.2 Fehlerabschätzungen für Einschrittapproximationen

Das Theorem 3.1.1 liefert uns die Bedingungen, unter denen ein Einschrittverfahren mit einer bestimmten Ordnung im starken Sinne konvergiert. In diesem Abschnitt konstruieren wir Einschrittverfahren auf der Basis von abgeschnittenen Ito-Taylor-Entwicklungen und verifizieren für sie die entsprechenden Abschätzungen (3.2), (3.3) und (3.4).

Sei also \mathcal{A} eine hierarchische Menge und sei

$$\overline{X}_{t,x}(t + \Delta) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} I_{\alpha} [F_{\alpha}(t, x)]_{t,t+\Delta} \quad (3.17)$$

die abgeschnittene Ito-Taylor-Entwicklung zu \mathcal{A} mit Ito-Kontroll-Koeffizientenfunktionen F_{α} für $F(t, x) \equiv x$.

Wir formulieren und beweisen zunächst einige technische Resultate, die wir in diesem Abschnitt benutzen wollen.

Lemma 3.2.1 *Mit den Bezeichnungen aus dem Abschnitt 2.2 gilt:*

Für $l(\alpha) = o(\alpha) + n(\alpha)$ ist

$$|I_{\alpha,t,t+\Delta}| \leq \frac{u_{\max}^{n(\alpha)}}{l(\alpha)!} \Delta^{l(\alpha)},$$

wobei

$$u_{\max} := \max_{1 \leq j \leq k} \sup_{t \in [0, T]} |u^j(t)|.$$

Beweis: Wir führen vollständige Induktion über die Länge $l(\alpha)$.

Für $l(\alpha) = 0$ ist $I_{\alpha,t,t+\Delta} = I_{\odot,t,t+\Delta} = 1$.

Sei nun $l(\alpha) > 0$. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

Erster Fall: $j_l = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} |I_{\alpha,t,t+\Delta}| &= \left| \int_t^{t+\Delta} I_{\alpha-,t,s} ds \right| \leq \int_t^{t+\Delta} \frac{u_{\max}^{n(\alpha-)}}{l(\alpha-)!} (s-t)^{l(\alpha-)} ds \\ &= \frac{u_{\max}^{n(\alpha-)}}{l(\alpha-)!} \cdot \frac{1}{l(\alpha-) + 1} \cdot \Delta^{l(\alpha-)+1} = \frac{u_{\max}^{n(\alpha)}}{l(\alpha)!} \Delta^{l(\alpha)}, \end{aligned}$$

denn $n(\alpha-) = n(\alpha)$ und $l(\alpha-) + 1 = l(\alpha)$.

Zweiter Fall: $j_l = \underline{j}$ mit $j \in \{1, \dots, k\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} |I_{\alpha,t,t+\Delta}| &= \left| \int_t^{t+\Delta} I_{\alpha-,t,s} \cdot u^{j_l}(s) ds \right| \leq u_{\max} \int_t^{t+\Delta} |I_{\alpha-,t,s}| ds \\ &\leq u_{\max} \int_t^{t+\Delta} \frac{u_{\max}^{n(\alpha-)}}{l(\alpha-)!} (s-t)^{l(\alpha-)} ds = \frac{u_{\max}^{n(\alpha-)+1}}{l(\alpha-)!} \cdot \frac{1}{l(\alpha-) + 1} \cdot \Delta^{l(\alpha-)+1} \\ &= \frac{u_{\max}^{n(\alpha)}}{l(\alpha)!} \Delta^{l(\alpha)}. \end{aligned}$$

Somit ist das Lemma bewiesen. \square

Lemma 3.2.2 Sei $\alpha \in \mathcal{M}_{k,m}$, sei $0 \leq \rho < \tau \leq T$ und Z ein reellwertiger stochastischer Prozess mit $\sup_{0 \leq s \leq T} E|Z(s)|^2 < \infty$. Dann gilt:

$$E(I_\alpha[Z(\cdot)]_{\rho,\tau})^2 \leq \frac{(u_{\max})^{2n(\alpha)}}{l(\alpha)!} \sup_{\rho \leq s \leq \tau} E(Z^2(s)) \cdot (\tau - \rho)^{l(\alpha)+o(\alpha)+n(\alpha)},$$

vorausgesetzt $I_\alpha[Z(\cdot)]_{\rho,\tau}$ existiert.

Beweis: Wieder durch vollständige Induktion über $l(\alpha)$: Für $l(\alpha) = 0$, also $\alpha = \odot$ ist

$$E(I_\odot[Z(\cdot)]_{\rho,\tau})^2 = E(Z(\tau))^2.$$

Für $l(\alpha) \geq 1$ unterscheiden wir drei Fälle:

Fall 1: $\alpha = (j_1, \dots, j_l)$, $j_l = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
& E (I_\alpha[Z(\cdot)]_{\rho, \tau})^2 \\
&= E \left(\int_\rho^\tau I_{\alpha-}[Z(\cdot)]_{\rho, s} ds \right)^2 \\
&\leq (\tau - \rho) \int_\rho^\tau E (I_{\alpha-}[Z(\cdot)]_{\rho, s})^2 ds \\
&\leq (\tau - \rho) \int_\rho^\tau \frac{(u_{\max})^{2n(\alpha-)}}{l(\alpha-)!} \sup_{\rho \leq \sigma \leq s} E (Z^2(\sigma)) (s - \rho)^{l(\alpha-)+o(\alpha-)+n(\alpha-)} ds \\
&\leq (\tau - \rho) \frac{(u_{\max})^{2n(\alpha-)}}{l(\alpha-)!} \sup_{\rho \leq s \leq \tau} E (Z^2(s)) \cdot \frac{(\tau - \rho)^{l(\alpha-)+o(\alpha-)+n(\alpha-)+1}}{l(\alpha-) + o(\alpha-) + n(\alpha-) + 1}.
\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}
l(\alpha) &= l(\alpha-) + 1, \\
o(\alpha) &= o(\alpha-) + 1, \\
n(\alpha) &= n(\alpha-), \\
\frac{1}{l(\alpha-) + o(\alpha-) + n(\alpha-) + 1} &\leq \frac{1}{l(\alpha)},
\end{aligned}$$

folgt:

$$E (I_\alpha[Z(\cdot)]_{\rho, \tau})^2 \leq \frac{(u_{\max})^{2n(\alpha)}}{l(\alpha)!} (\tau - \rho)^{l(\alpha)+o(\alpha)+n(\alpha)} \cdot \sup_{\rho \leq s \leq \tau} E (Z^2(s)).$$

Fall 2: $\alpha = (j_1, \dots, j_l)$, $j_l = \underline{j}$ mit $j \in \{1, \dots, k\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
& E (I_\alpha[Z(\cdot)]_{\rho, \tau})^2 \\
&= E \left(\int_\rho^\tau I_{\alpha-}[Z(\cdot)]_{\rho, s} u^{j_l}(s) ds \right)^2 \\
&\leq \int_\rho^\tau E |I_{\alpha-}[Z(\cdot)]_{\rho, s}|^2 ds \cdot \int_\rho^\tau |u^{j_l}(s)|^2 ds \\
&\leq (u_{\max})^2 (\tau - \rho) \int_\rho^\tau \frac{(u_{\max})^{2n(\alpha-)}}{l(\alpha-)!} \sup_{\rho \leq \sigma \leq s} E (Z^2(\sigma)) (s - \rho)^{l(\alpha-)+o(\alpha-)+n(\alpha-)} ds \\
&\leq \frac{(u_{\max})^{2n(\alpha)}}{l(\alpha)!} (\tau - \rho)^{l(\alpha)+o(\alpha)+n(\alpha)} \cdot \sup_{\rho \leq s \leq \tau} E (Z^2(s)),
\end{aligned}$$

denn $n(\alpha) = n(\alpha-) + 1$, $o(\alpha) = o(\alpha-)$, $l(\alpha) = l(\alpha-) + 1$.

Fall 3: $\alpha = (j_1, \dots, j_l)$, $j_l = \bar{j}$ mit $j \in \{1, \dots, m\}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
& E (I_\alpha [Z(\cdot)]_{\rho, \tau})^2 \\
&= E \left(\int_\rho^\tau I_{\alpha-} [Z(\cdot)]_{\rho, s} dW^{j_l}(s) \right)^2 \\
&\leq \int_\rho^\tau \frac{(u_{\max})^{2n(\alpha-)}}{l(\alpha-)!} \sup_{\rho \leq \sigma \leq s} E (Z^2(\sigma)) (s - \rho)^{l(\alpha-)+o(\alpha-)+n(\alpha-)} ds \\
&\leq \frac{(u_{\max})^{2n(\alpha)}}{l(\alpha-)!} \sup_{\rho \leq s \leq \tau} E (Z^2(s)) \cdot \frac{(\tau - \rho)^{l(\alpha)+o(\alpha)+n(\alpha)}}{l(\alpha) + o(\alpha) + n(\alpha)} \\
&\leq \frac{(u_{\max})^{2n(\alpha)}}{l(\alpha)!} (\tau - \rho)^{l(\alpha)+o(\alpha)+n(\alpha)} \cdot \sup_{\rho \leq s \leq \tau} E (Z^2(s)),
\end{aligned}$$

denn $o(\alpha) = o(\alpha-)$, $n(\alpha) = n(\alpha-)$, $l(\alpha) = l(\alpha-) + 1$.

Somit ist das Lemma bewiesen. \square

Nun folgen zwei Lemmata, die die eigentlichen Bedingungen (3.2) und (3.3) des Theorems 3.1.1 liefern.

Lemma 3.2.3 *Für eine beliebige nichtleere Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_{k,m}$ setze*

$$L(\mathcal{B}) := \min_{\alpha \in \mathcal{B}: l(\alpha)=n(\alpha)+o(\alpha)} l(\alpha).$$

Dann gilt folgende Abschätzung:

$$\left| E (X_{t,x}(t + \Delta) - \bar{X}_{t,x}(t + \Delta)) \right|_2 \leq K (1 + |x|_2^2)^{1/2} \cdot \Delta^{L(\mathcal{R}(\mathcal{A}))}. \quad (3.18)$$

Beweis: Die Ito-Taylor-Entwicklung (2.15) liefert zusammen mit (3.17):

$$\begin{aligned}
\left| E (X_{t,x}(t + \Delta) - \bar{X}_{t,x}(t + \Delta)) \right|_2 &= \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{A})} E \left(I_\alpha [F_\alpha (\cdot, X(\cdot))]_{t, t+\Delta} \right) \right|_2 \\
&\leq \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{A})} \left| E \left(I_\alpha [F_\alpha (\cdot, X(\cdot))]_{t, t+\Delta} \right) \right|_2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{A}): \\ l(\alpha)=n(\alpha)+o(\alpha)}} \left| E \left(I_\alpha [F_\alpha(\cdot, X(\cdot))]_{t,t+\Delta} \right) \right|_2 \\
&\leq \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{A}): \\ l(\alpha)=n(\alpha)+o(\alpha)}} I_\alpha \left[E \left(|F_\alpha(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2 \right) \right]_{t,t+\Delta}.
\end{aligned}$$

Wegen des linearen Wachstums von F_α folgt:

$$\begin{aligned}
\left| E \left(X_{t,x}(t+\Delta) - \overline{X}_{t,x}(t+\Delta) \right) \right|_2 &\leq \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{A}): \\ l(\alpha)=n(\alpha)+o(\alpha)}} I_\alpha \left[E \left(K \cdot (1 + |X_{t,x}(\cdot)|_2) \right) \right]_{t,t+\Delta} \\
&\leq \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{A}): \\ l(\alpha)=n(\alpha)+o(\alpha)}} K \cdot I_\alpha \left[1 + E \left(|X_{t,x}(\cdot)|_2 \right) \right]_{t,t+\Delta}.
\end{aligned}$$

Mit den Lemmata 3.1.4 und 3.2.1 ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned}
\left| E \left(X_{t,x}(t+\Delta) - \overline{X}_{t,x}(t+\Delta) \right) \right|_2 &\leq K \cdot (1 + |x|_2^2)^{1/2} \cdot \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{A}): \\ l(\alpha)=n(\alpha)+o(\alpha)}} I_{\alpha,t,t+\Delta} \\
&\leq K (1 + |x|_2^2)^{1/2} \cdot \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{A}): \\ l(\alpha)=n(\alpha)+o(\alpha)}} \Delta^{l(\alpha)} \\
&\leq K (1 + |x|_2^2)^{1/2} \cdot \Delta^{L(\mathcal{R}(\mathcal{A}))}.
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.2.4 Für eine beliebige nichtleere Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_{k,m}$ setze

$$m(\mathcal{B}) := \min_{\alpha \in \mathcal{B}} (l(\alpha) + o(\alpha) + n(\alpha)).$$

Dann gilt:

$$\left(E |X_{t,x}(t+\Delta) - \overline{X}_{t,x}(t+\Delta)|_2^2 \right)^{1/2} \leq K (1 + |x|_2^2)^{1/2} \cdot \Delta^{m(\mathcal{R}(\mathcal{A}))/2}. \quad (3.19)$$

Beweis: Unter Verwendung der Ito-Taylor-Entwicklung erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left(E \left| X_{t,x}(t+\Delta) - \overline{X}_{t,x}(t+\Delta) \right|_2^2 \right)^{1/2} &= \left(E \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{A})} I_\alpha [F_\alpha(\cdot, X_{t,x}(\cdot))]_{t,t+\Delta} \right|_2^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{A})} \left(E \left| I_\alpha [F_\alpha(\cdot, X_{t,x}(\cdot))]_{t,t+\Delta} \right|_2^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.2.2 folgt weiter:

$$\begin{aligned} &\left(E \left| X_{t,x}(t+\Delta) - \overline{X}_{t,x}(t+\Delta) \right|_2^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{A})} \left(d \frac{(u_{max})^{2n(\alpha)}}{l(\alpha)!} \sup_{t \leq s \leq t+\Delta} E \left| F_\alpha(s, X_{t,x}(s)) \right|_2^2 \cdot \Delta^{l(\alpha)+o(\alpha)+n(\alpha)} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Wegen des linearen Wachstums von F_α gilt für alle $s \in [t, t+\Delta]$:

$$E \left| F_\alpha(s, X_{t,x}(s)) \right|_2^2 \leq K \left(1 + E \left| X_{t,x}(s) \right|_2^2 \right),$$

und Lemma 3.1.4 liefert:

$$\begin{aligned} E \left| F_\alpha(s, X_{t,x}(s)) \right|_2^2 &\leq K \left(1 + e^{K(s-t)} (1 + |x|_2^2) \right) \\ &\leq K \left(1 + e^{K(T-t)} (1 + |x|_2^2) \right) \\ &\leq K(1 + |x|_2^2). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Die letzte Ungleichung führt zusammen mit (3.20) und $\Delta \leq 1$ auf die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \left(E \left| X_{t,x}(t+\Delta) - \overline{X}_{t,x}(t+\Delta) \right|_2^2 \right)^{1/2} &\leq K(1 + |x|_2^2)^{1/2} \cdot \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{A})} \Delta^{l(\alpha)+n(\alpha)+o(\alpha)} \cdot \frac{1}{2} \\ &\leq K(1 + |x|_2^2)^{1/2} \cdot \Delta^{m(\mathcal{R}(\mathcal{A}))/2}. \end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis des Lemmas. \square

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir dem numerischen Verfahren \overline{X} zu, welches auf der Basis der zu \mathcal{A}_γ assoziierten abgeschnittenen Ito-Taylor-Entwicklung definiert wird durch

$$\overline{X}_{t,x}(t+\Delta) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma} I_\alpha [F_\alpha(t, x)]_{t,t+\Delta}$$

mit Ito-Kontroll-Koeffizientenfunktionen F_α für $F(t, x) \equiv x$. Unsere Fragestellung lautet, wie die hierarchische Menge \mathcal{A}_γ aussehen muß, damit dieses Verfahren die starke Ordnung $\gamma \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots\}$ hat, d.h. damit

$$\left(E |X_{0,X_0}(T) - \overline{X}_{0,X_0}(T)|_2^2\right)^{1/2} \leq K\Delta^\gamma$$

gilt.

Vergleicht man die Bedingungen (3.2) und (3.3) aus dem Theorem 3.1.1 mit den Ungleichungen (3.18) und (3.19), welche die beiden letzten Lemmata liefern, so erkennt man, dass \overline{X}^γ die Bedingung (3.2) mit $p_1 = L(\mathcal{R}(\mathcal{A}_\gamma))$ und die Bedingung (3.3) mit $p_2 = m(\mathcal{R}(\mathcal{A}_\gamma))/2$ erfüllt. Wegen der Bedingung (3.4) müssen wir verlangen, dass $p_2 = m(\mathcal{R}(\mathcal{A}_\gamma))/2 \geq \frac{1}{2}$, also

$$m(\mathcal{R}(\mathcal{A}_\gamma)) \geq 1 \tag{3.22}$$

und $p_1 \geq p_2 + \frac{1}{2}$, also

$$L(\mathcal{R}(\mathcal{A}_\gamma)) \geq \frac{1}{2}(m(\mathcal{R}(\mathcal{A}_\gamma)) + 1)$$

gilt.

Laut Theorem 3.1.1 hat dann das numerische Verfahren zu \mathcal{A}_γ die Ordnung

$$\frac{1}{2}(m(\mathcal{R}(\mathcal{A}_\gamma)) - 1).$$

Um Ordnung γ zu erreichen, ist somit

$$\frac{1}{2}(m(\mathcal{R}(\mathcal{A}_\gamma)) - 1) = \gamma,$$

d.h.

$$m(\mathcal{R}(\mathcal{A}_\gamma)) = 2\gamma + 1,$$

zu gewährleisten. Dies hat insbesondere (3.22) zur Folge.

Wir suchen also eine hierarchische Menge \mathcal{A}_γ , die folgende Kriterien erfüllt:

$$m(\mathcal{R}(\mathcal{A}_\gamma)) = 2\gamma + 1 \tag{3.23}$$

$$L(\mathcal{R}(\mathcal{A}_\gamma)) \geq \gamma + 1 \tag{3.24}$$

Das folgende Lemma wird uns dabei behilflich sein:

Lemma 3.2.5 *Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{k,m}$ eine hierarchische Menge. Für die Restmenge $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ gilt genau dann die Beziehung $m(\mathcal{R}(\mathcal{A})) = q + 1$, wenn \mathcal{A} die Menge*

$$\mathcal{A}' := \{\alpha \in \mathcal{M}_{k,m} : l(\alpha) + n(\alpha) + o(\alpha) \leq q\}$$

enthält, aber nicht die Menge

$$\mathcal{A}'' := \{\alpha \in \mathcal{M}_{k,m} : l(\alpha) + n(\alpha) + o(\alpha) \leq q + 1\}.$$

Beweis:

1. $m(\mathcal{R}(\mathcal{A})) = q + 1 \Rightarrow \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$:

Angenommen, es existiert ein $\tilde{\alpha} \in \mathcal{M}_{k,m} \setminus \mathcal{A}$ mit $l(\tilde{\alpha}) + n(\tilde{\alpha}) + o(\tilde{\alpha}) \leq q$. Wegen $m(\mathcal{R}(\mathcal{A})) = q + 1$ ist $\tilde{\alpha} \notin \mathcal{R}(\mathcal{A})$, also ist $\tilde{\alpha} \in \mathcal{M}_{k,m} \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R}(\mathcal{A}))$. Damit ist

$$-\tilde{\alpha} \in \mathcal{M}_{k,m} \setminus \mathcal{A} \quad \text{und} \quad l(-\tilde{\alpha}) + n(-\tilde{\alpha}) + o(-\tilde{\alpha}) \leq q.$$

Mit den gleichen Argumenten erhalten wir nun

$$-(-\tilde{\alpha}) \in \mathcal{M}_{k,m} \setminus \mathcal{A} \quad \text{und} \quad l(-(-\tilde{\alpha})) + n(-(-\tilde{\alpha})) + o(-(-\tilde{\alpha})) \leq q$$

usw. bis schließlich $\odot \in \mathcal{M}_{k,m} \setminus \mathcal{A}$ folgt, was ein Widerspruch zur Definition von hierarchischen Mengen ist.

2. $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow m(\mathcal{R}(\mathcal{A})) = q + 1$:

$\beta \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ impliziert $l(\beta) + n(\beta) + o(\beta) \geq q + 1$, denn $l(\beta) + n(\beta) + o(\beta) \leq q$ würde $\beta \in \mathcal{A}'$ und nach Voraussetzung $\beta \in \mathcal{A}$ nach sich ziehen. Letzteres ist aber ein Widerspruch zu $\beta \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$. Es gilt also $m(\mathcal{R}(\mathcal{A})) \geq q + 1$. Da \mathcal{A} aber die Menge \mathcal{A}'' nicht enthält, existiert ein Index $\alpha \notin \mathcal{A}$ mit $l(\alpha) + n(\alpha) + o(\alpha) = q + 1$. Offensichtlich liegt α in $\mathcal{R}(\mathcal{A})$.

□

Setzen wir

$$\mathcal{A}'_\gamma := \{\alpha \in \mathcal{M}_{k,m} : l(\alpha) + n(\alpha) + o(\alpha) \leq 2\gamma\},$$

so ist die Inklusion

$$\mathcal{A}'_\gamma \subseteq \mathcal{A}_\gamma$$

nach Lemma 3.2.5 eine notwendige Bedingung für (3.23). Je grösser wir die Menge \mathcal{A}_γ wählen, desto mehr Terme werden im numerischen Schema (3.17) enthalten sein, d.h. der Rechenaufwand und die Rundungsfehler steigen. Wir sollten daher versuchen, \mathcal{A}_γ minimal zu wählen.

Dazu fügen wir zur Menge \mathcal{A}'_γ nur so viele Elemente hinzu, dass auch die Bedingung (3.24) erfüllt wird. Wir müssen dabei natürlich darauf achten, dass die auf diese Weise erhaltene Menge \mathcal{A}_γ hierarchisch ist.

Wir betrachten zwei Fälle:

Erster Fall:

Ist γ eine natürliche Zahl, so enthält die Menge \mathcal{A}'_γ alle Multiindizes α mit $l(\alpha) = n(\alpha) + o(\alpha) = \gamma$. Sie kann aber keine längeren Multiindizes mit dieser Eigenschaft enthalten, denn sonst gäbe es α mit $l(\alpha) + n(\alpha) + o(\alpha) > 2\gamma$. Der kürzeste Multiindex α^* in der Restmenge $\mathcal{R}(\mathcal{A}'_\gamma)$ mit $l(\alpha^*) = n(\alpha^*) + o(\alpha^*)$ hat also die Länge $l(\alpha^*) = \gamma + 1 = L(\mathcal{R}(\mathcal{A}'_\gamma))$. Die Bedingung (3.24) ist somit erfüllt.

Zweiter Fall:

Für $\gamma = \frac{2q-1}{2}$, $q \in \mathbb{N}$ ist $2\gamma = 2q - 1$, also ungerade. Wegen $\mathcal{A}'_\gamma \subseteq \mathcal{A}_\gamma$ enthält \mathcal{A}_γ alle Multiindizes α mit $l(\alpha) = n(\alpha) + o(\alpha) < \gamma$. Für die Länge des kürzesten Multiindex α^* in der Restmenge $\mathcal{R}(\mathcal{A}_\gamma)$ mit der Eigenschaft $l(\alpha^*) = n(\alpha^*) + o(\alpha^*)$ gilt daher $l(\alpha^*) \geq \gamma$. Um (3.24) zu erhalten, vereinigen wir \mathcal{A}'_γ mit der Menge aller Multiindizes α , für die

$$l(\alpha) = n(\alpha) + o(\alpha) = \gamma + \frac{1}{2} \quad (3.25)$$

gilt. Die Gleichung (3.25) zieht $L(\mathcal{R}(\mathcal{A}_\gamma)) \geq \gamma + \frac{3}{2}$ und damit (3.24) nach sich.

Nach diesen Überlegungen können wir für ein beliebiges $\gamma \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots\}$ die Menge \mathcal{A}_γ wie folgt wählen:

$$\mathcal{A}_\gamma := \left\{ \alpha \in \mathcal{M}_{k,m} : l(\alpha) + n(\alpha) + o(\alpha) \leq 2\gamma \text{ oder } l(\alpha) = n(\alpha) + o(\alpha) = \gamma + \frac{1}{2} \right\}$$

Offensichtlich ist die Menge \mathcal{A}'' nicht in \mathcal{A}_γ enthalten, das Lemma 3.2.5 behält also seine Gültigkeit. Es bleibt noch nachzuprüfen, ob die so gewählte Menge \mathcal{A}_γ hierarchisch ist.

Tatsächlich, für ein $\alpha \in \mathcal{A}_\gamma$ mit $l(\alpha) + n(\alpha) + o(\alpha) \leq 2\gamma$ ist $l(-\alpha) + n(-\alpha) + o(-\alpha) < 2\gamma$, also $-\alpha \in \mathcal{A}_\gamma$. Für ein $\beta \in \mathcal{A}_\gamma$ mit $l(\beta) = n(\beta) + o(\beta) = \gamma + \frac{1}{2}$ ist

$$l(-\beta) + n(-\beta) + o(-\beta) = \gamma - \frac{1}{2} + \gamma - \frac{1}{2} = 2\gamma - 1 < 2\gamma,$$

also auch $-\beta \in \mathcal{A}_\gamma$, d.h. die Menge \mathcal{A}_γ ist hierarchisch.

3.3 Ito-Taylor-Verfahren der starken Ordnung γ für stochastische affine Kontrollsysteme

Als Konsequenz aus den Abschnitten 3.1 und 3.2 können wir nun das Hauptresultat über starke Ito-Taylor-Einschrittverfahren für stochastische affine Kontrollsysteme (1.2) im allgemeinen mehrdimensionalen Fall $d, k, m = 1, 2, \dots$ formulieren:

Theorem 3.3.1 *Sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ eine äquidistante Diskretisierung von $[0, T]$ mit der Schrittweite $\Delta = T/N \leq 1$ und sei \bar{X} definiert gemäß*

$$\bar{X}_{0,X_0}(t_{i+1}) = \bar{X}_{0,X_0}(t_i) + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma \setminus \odot} [F_\alpha(t_i, \bar{X}_i)] I_{\alpha, t_i, t_{i+1}} \quad (3.26)$$

oder komponentenweise

$$\bar{X}_{0,X_0}^\mu(t_{i+1}) = \bar{X}_{0,X_0}^\mu(t_i) + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\gamma \setminus \odot} [F_\alpha^\mu(t_i, \bar{X}_i)] I_{\alpha, t_i, t_{i+1}} \quad (3.27)$$

mit der hierarchischen Menge

$$\mathcal{A}_\gamma := \left\{ \alpha \in \mathcal{M}_{k,m} : \begin{array}{l} l(\alpha) + n(\alpha) + o(\alpha) \leq 2\gamma \text{ oder} \\ l(\alpha) = n(\alpha) + o(\alpha) = \gamma + \frac{1}{2} \end{array} \right\}, \quad (3.28)$$

Koeffizientenfunktionen F_α^μ entsprechend $F(t, x) = x^\mu$ für $\mu = 1, \dots, d$ und mit mehrfachen Ito-Kontrollintegralen

$$I_{\alpha, t_i, t_{i+1}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{s_1} \cdots \int_{t_i}^{s_l} dW^{j_1}(s_1) \cdots dW^{j_l}(s_l) \\ \text{für } \alpha = (j_1, \dots, j_l) \in \mathcal{A}_\gamma,$$

wobei

$$dW^0(s) = ds, \\ dW^j(s) = u^j(s)ds \text{ für } j \in \{\underline{1}, \dots, \underline{k}\}.$$

Dann gilt

$$\left(E |X_{0, X_0}(t_i) - \bar{X}_{0, X_0}(t_i)|_2^2 \right)^{1/2} \leq K \Delta^\gamma$$

für $i = 0, \dots, N$, d.h. \bar{X} hat die starke Ordnung γ . Wir nennen \bar{X} starkes Ito-Taylor-Verfahren der Ordnung γ .

□

Wir schreiben jetzt einige konkrete numerische Schemata bestimmter Ordnung auf. Dabei nehmen wir zuerst an, die mehrfachen Ito-Kontrollintegrale $I_{\alpha, t_i, t_{i+1}}$ stehen bereits zur Verfügung. Wir gehen von einer äquidistanten Zerlegung des Intervalls $[0, T]$ aus, d.h. $t_{i+1} - t_i = \Delta \leq 1$ für $i = 0, \dots, N - 1$. Es wird zwischen gewöhnlichen Riemann-Integralen zu Multiindizes (0) , $(0, 0)$, $(0, 0, 0)$, ... und anderen mehrfachen Integralen unterschieden, denn gewöhnliche Riemann-Integrale können ohne zusätzlichen Aufwand exakt ausgewertet werden.

3.3.1 Das Euler-Schema

Wir beginnen mit dem einfachsten nichttrivialen Ito-Taylor -Schema für stochastische affine Kontrollsysteme. Sein Analogon für gewöhnliche stochastische Differentialgleichungen ist als Euler-Schema bekannt. Für die gewünschte starke Ordnung $\gamma = 1/2$ ist

$$\mathcal{A}_{\frac{1}{2}} = \{\odot, (0), (\underline{1}), \dots, (\underline{k}), (\bar{1}), \dots, (\bar{m})\}$$

und somit ist die μ -te Komponente des Schemas gegeben durch

$$\begin{aligned}\bar{X}_{0,X_0}^\mu(t_{i+1}) &= \bar{X}_{0,X_0}^\mu(t_i) + f_\mu(t_i, \bar{X}_i)\Delta + \sum_{j=1}^k g_{\mu,j}(t_i, \bar{X}_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u^j(s) ds \\ &\quad + \sum_{r=1}^m h_{\mu,r}(t_i, \bar{X}_i)\Delta W^r\end{aligned}\tag{3.29}$$

für $\mu = 1, \dots, d$, wobei ΔW^r das $N(0, 1)$ -verteilte Inkrement der r -ten Komponente des Wiener Prozesses W im Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ ist.

3.3.2 Das Ito-Taylor-Schema der starken Ordnung $\gamma = 1$

Dieses Ito-Taylor-Schema wurde für gewöhnliche stochastische Differentialgleichungen von Milstein formuliert. Für $\gamma = 1$ haben wir

$$\mathcal{A}_1 = \{\odot, (0), (\underline{1}), \dots, (\underline{k}), (\bar{1}), \dots, (\bar{m})\} \cup \{(i, j) \text{ mit } i, j \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}\}$$

Die μ -te Komponente des Milstein-Schemas ist dementsprechend gegeben durch

$$\begin{aligned}\bar{X}_{0,X_0}^\mu(t_{i+1}) &= \bar{X}_{0,X_0}^\mu(t_i) + f_\mu(t_i, \bar{X}_i)\Delta + \sum_{j=1}^k g_{\mu,j}(t_i, \bar{X}_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u^j(s) ds \\ &\quad + \sum_{r=1}^m h_{\mu,r}(t_i, \bar{X}_i)\Delta W^r + \sum_{r_1, r_2=1}^m L^{\bar{r}_1} h_{\mu, r_2}(t_i, \bar{X}_i) I_{(\bar{r}_1, \bar{r}_2), t_i, t_{i+1}}\end{aligned}\tag{3.30}$$

für $\mu = 1, \dots, d$ mit

$$I_{(\bar{r}_1, \bar{r}_2), t_i, t_{i+1}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^s dW^{r_1}(v) dW^{r_2}(s).$$

Für $r_1 \neq r_2$ mit $r_1, r_2 \in \{1, \dots, m\}$ kommen im Milstein-Schema mehrfache stochastische Integrale $I_{(\bar{r}_1, \bar{r}_2), t_i, t_{i+1}}$ vor, die nicht in Termen von Inkrementen ΔW^{r_1} und ΔW^{r_2} ausgedrückt werden können. Im Fall $m = 1$ ist es allerdings möglich. Im Abschnitt 4.2 werden wir das Lemma 4.2.1 beweisen, das uns den folgenden Zusammenhang zwischen $I_{(0)}$, $I_{(\bar{1})}$ und $I_{(\bar{1}, \bar{1})}$ liefert:

$$I_{(\bar{1})} \cdot I_{(\bar{1})} = I_{(\bar{1}, \bar{1})} + I_{(\bar{1}, \bar{1})} + I_{(0)},$$

woraus sich sofort

$$I_{(\bar{1}, \bar{1})} = \frac{1}{2} (I_{(\bar{1})} \cdot I_{(\bar{1})} - I_{(0)}) = \frac{1}{2} ((\Delta W)^2 - \Delta)$$

ergibt. Damit sieht die μ -te Komponente des Milstein-Schemas für den Fall $m = 1$, $d = 1, 2, \dots$ wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{0, X_0}^\mu(t_{i+1}) &= \bar{X}_{0, X_0}^\mu(t_i) + f_\mu(t_i, \bar{X}_i) \Delta + \sum_{j=1}^k g_{\mu, j}(t_i, \bar{X}_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u^j(s) ds \quad (3.31) \\ &\quad + h_\mu(t_i, \bar{X}_i) \Delta W + \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^d h_l \frac{\partial h_\mu}{\partial x_l}(t_i, \bar{X}_i) \right) ((\Delta W)^2 - \Delta) \end{aligned}$$

für $\mu = 1, \dots, d$.

3.3.3 Das Ito-Taylor-Schema der starken Ordnung $\gamma = \frac{3}{2}$

Für $\gamma = \frac{3}{2}$ ist

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\frac{3}{2}} = \{ \odot \} \cup \{ \alpha \in \mathcal{M}_{k, m} \text{ mit } l(\alpha) \in \{1, 2\} \} \\ \cup \{ (j_1, j_2, j_3) \text{ mit } j_1, j_2, j_3 \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\} \} \end{aligned}$$

und dementsprechend

$$\begin{aligned} \bar{X}_{0, X_0}^\mu(t_{i+1}) &= \bar{X}_{0, X_0}^\mu(t_i) + f_\mu(t_i, \bar{X}_i) \Delta + \sum_{j=1}^k g_{\mu, j}(t_i, \bar{X}_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u^j(s) ds \quad (3.32) \\ &\quad + \sum_{r=1}^m h_{\mu, r}(t_i, \bar{X}_i) \Delta W^r(s) + \frac{1}{2} L^0 f_\mu(t_i, \bar{X}_i) \Delta^2 \\ &\quad + \sum_{\substack{j_1, j_2=0, \\ j_1+j_2 \neq 0}}^k L^{\underline{j}} g_{\mu, j_2}(t_i, \bar{X}_i) I_{(\underline{j}_1, \underline{j}_2), t_i, t_{i+1}} + \sum_{j=0}^k \sum_{r=1}^m L^{\underline{j}} h_{\mu, r}(t_i, \bar{X}_i) I_{(\underline{j}, \bar{r}), t_i, t_{i+1}} \\ &\quad + \sum_{j=0}^k \sum_{r=1}^m L^{\bar{r}} g_{\mu, j}(t_i, \bar{X}_i) I_{(\bar{r}, \underline{j}), t_i, t_{i+1}} + \sum_{r_1, r_2=1}^m L^{\bar{r}_1} h_{\mu, r_2}(t_i, \bar{X}_i) I_{(\bar{r}_1, \bar{r}_2), t_i, t_{i+1}} \\ &\quad + \sum_{r_1, r_2, r_3=1}^m L^{\bar{r}_1} L^{\bar{r}_2} h_{\mu, r_3}(t_i, \bar{X}_i) I_{(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3), t_i, t_{i+1}}, \end{aligned}$$

wobei $g_{\mu, 0} := f_\mu$, $\mu = 1, \dots, d$ und $\underline{0} = \bar{0} = 0$.

3.3.4 Das Ito-Taylor-Schema der starken Ordnung $\gamma = \frac{3}{2}$ für kommutatives Rauschen zweiter Art

Im Ito-Taylor-Schema (3.32) der starken Ordnung $\gamma = \frac{3}{2}$ kommen mehrfache Ito-Kontrollintegrale $I_{(\underline{j}, \bar{r}), t_i, t_{i+1}}$, $I_{(\bar{r}, \underline{j}), t_i, t_{i+1}}$, $I_{(\bar{r}_1, \bar{r}_2), t_i, t_{i+1}}$, $I_{(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3), t_i, t_{i+1}}$ vor, die für allgemeine $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ und $r, r_1, r_2, r_3 \in \{1, \dots, m\}$ nicht berechnet werden können.

Im Falle eines *kommutativen Rauschens*, d.h. wenn stochastische Komponenten $h_{\mu, r}$ den Bedingungen

$$L^{\underline{j}} h_{\mu, r}(t, x) \equiv L^{\bar{r}} g_{\mu, j}(t, x)$$

und

$$L^{\bar{r}_1} h_{\mu, r_2}(t, x) \equiv L^{\bar{r}_2} h_{\mu, r_1}(t, x)$$

für $j \in \{0, 1, \dots, k\}$, $r, r_1, r_2 \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}$ genügen, läßt sich das Ito-Taylor-Schema vereinfachen. Es gilt nämlich

$$I_{(\underline{j}, \bar{r}), t_i, t_{i+1}} + I_{(\bar{r}, \underline{j}), t_i, t_{i+1}} = I_{(\underline{j}), t_i, t_{i+1}} I_{(\bar{r}), t_i, t_{i+1}}$$

und damit vereinfacht sich die Summe

$$L^{\underline{j}} h_{\mu, r}(t_i, \bar{X}_i) I_{(\underline{j}, \bar{r}), t_i, t_{i+1}} + L^{\bar{r}} g_{\mu, j}(t_i, \bar{X}_i) I_{(\bar{r}, \underline{j}), t_i, t_{i+1}}$$

zum Term

$$L^{\underline{j}} h_{\mu, r} I_{(\underline{j}), t_i, t_{i+1}} I_{(\bar{r}), t_i, t_{i+1}}, \quad (3.33)$$

der nur die einfachen Ito-, Kontroll- bzw. Riemann-Integrale enthält.

Außerdem gilt

$$I_{(\bar{r}_1, \bar{r}_2), t_i, t_{i+1}} + I_{(\bar{r}_2, \bar{r}_1), t_i, t_{i+1}} = I_{(\bar{r}_1), t_i, t_{i+1}} \cdot I_{(\bar{r}_2), t_i, t_{i+1}} \quad \text{für } r_1 \neq r_2,$$

wodurch sich die Summe

$$L^{\bar{r}_1} h_{\mu, r_2}(t_i, \bar{X}_i) I_{(\bar{r}_1, \bar{r}_2), t_i, t_{i+1}} + L^{\bar{r}_2} h_{\mu, r_1}(t_i, \bar{X}_i) I_{(\bar{r}_2, \bar{r}_1), t_i, t_{i+1}}$$

für $r_1 \neq r_2$ zum Term

$$L^{\bar{r}_1} h_{\mu, r_2} I_{(\bar{r}_1), t_i, t_{i+1}} I_{(\bar{r}_2), t_i, t_{i+1}} \quad (3.34)$$

vereinfacht.

Verlangt man noch zusätzlich, dass

$$L^{\overline{r_1}} L^{\overline{r_2}} h_{\mu, r_3}(t, x) = L^{\overline{r_2}} L^{\overline{r_1}} h_{\mu, r_3}(t, x)$$

für $\mu = 1, \dots, d$ und $r_1, r_2, r_3 = 1, \dots, m$ gilt, so haben wir es mit dem sogenannten *kommutativen Rauschen zweiter Art* zu tun. In diesem Fall vereinfacht sich das Schema weiter. Es gilt (siehe [9] S.355)

$$\begin{aligned} & I_{(r_1, r_2, r_3)} + I_{(r_1, r_3, r_2)} + I_{(r_2, r_1, r_3)} + I_{(r_2, r_3, r_1)} + I_{(r_3, r_1, r_2)} + I_{(r_3, r_2, r_1)} \\ &= \begin{cases} \Delta W^{r_1} \Delta W^{r_2} \Delta W^{r_3} & \text{für } r_1 \neq r_2, r_1 \neq r_3, r_2 \neq r_3 \\ \Delta W^{r_1} ((\Delta W^{r_2})^2 - \Delta) & \text{für } r_1 \neq r_2, r_1 \neq r_3, r_2 = r_3 \\ ((\Delta W^{r_1})^2 - 3\Delta) \Delta W^{r_1} & \text{für } r_1 = r_2 = r_3 \end{cases} \quad (3.35) \end{aligned}$$

für $r_1, r_2, r_3 = 1, \dots, m$. Unter Berücksichtigung von (3.33), (3.34) und (3.35) ergibt sich folgendes numerisches Schema der starken Ordnung $\gamma = \frac{3}{2}$ für kommutatives Rauschen zweiter Art:

$$\begin{aligned} \overline{X}_{0, X_0}^\mu(t_{i+1}) &= \overline{X}_{0, X_0}^\mu(t_i) + f_\mu(t_i, \overline{X}_i) \Delta + \sum_{j=1}^k g_{\mu, j}(t_i, \overline{X}_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u^j(s) ds \quad (3.36) \\ &+ \sum_{r=1}^m h_{\mu, r}(t_i, \overline{X}_i) \Delta W^r(s) + \frac{1}{2} L^0 f_\mu(t_i, \overline{X}_i) \Delta^2 \\ &+ \sum_{\substack{j_1, j_2=0, \\ j_1+j_2 \neq 0}}^k L^{\underline{j_1}} g_{\mu, j_2}(t_i, \overline{X}_i) I_{(\underline{j_1}, \underline{j_2}), t_i, t_{i+1}} \\ &+ \sum_{r=1}^m L^0 h_{\mu, r}(t_i, \overline{X}_i) \Delta W^r \Delta + \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^m L^{\underline{j}} h_{\mu, r}(t_i, \overline{X}_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u^j(s) ds \Delta W^r \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m L^{\overline{r}} h_{\mu, r}((\Delta W^r)^2 - \Delta) + \sum_{r_1=1}^m \sum_{r_2=1}^{r_1-1} L^{\overline{r_1}} h_{\mu, r_2}(t_i, \overline{X}_i) \Delta W^{r_1} \Delta W^{r_2} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{r_1, r_2=1 \\ r_1 \neq r_2}}^m L^{\overline{r_1}} L^{\overline{r_2}} h_{\mu, r_2} \Delta W^{r_1} ((\Delta W^{r_2})^2 - \Delta) \\ &+ \sum_{r_1=1}^m \sum_{r_2=1}^{r_1-1} \sum_{r_3=1}^{r_2-1} L^{\overline{r_1}} L^{\overline{r_2}} h_{\mu, r_3}(t_i, \overline{X}_i) \Delta W^{r_1} \Delta W^{r_2} \Delta W^{r_3} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m L^{\bar{r}} L^{\bar{r}} h_{\mu,r}(t_i, \bar{X}_i) \left(\frac{1}{3} (\Delta W^r)^2 - \Delta \right) \Delta W^r,$$

wobei $g_{\mu,0} := f_{\mu}$, $\mu = 1, \dots, d$ und $\underline{0} = \bar{0} = 0$.

3.3.5 Ableitungsfreie starke Schemata

Neben den mehrfachen Ito-Kontrollintegralen, die im Allgemeinen nicht exakt ausgerechnet werden können, haben Ito-Taylor-Schemata einen weiteren Nachteil: In jedem Approximationsschritt müssen verschiedene Ableitungen der Funktionen f , g und h zuerst berechnet und dann ausgewertet werden. Obwohl dies heutzutage dank symbolischen Manipulatoren wie z.B. MAPLE kein unlösbares Problem mehr ist (siehe dazu z.B. die Arbeit von S. Cyganowski, L. Grüne und P.E. Kloeden [3]), ist es jedoch nützlich, numerische Schemata zur Verfügung zu haben, die ohne Ableitungen auskommen.

Solche Verfahren erinnern zwar an Runge-Kutta-Schemata, sind aber keinesfalls heuristische Übertragungen von deterministischen Runge-Kutta-Schemata auf stochastische affine Kontrollsysteme. Wir illustrieren hier die Herleitung der ableitungsfreien Schemata am Beispiel des starken Ito-Taylor-Verfahrens der Ordnung $\gamma = 1$.

Sei zunächst $d = k = m = 1$. In diesem Fall ist das Milstein-Schema gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{X}_{0,X_0}(t_{i+1}) &= \bar{X}_{0,X_0}(t_i) + f(t_i, \bar{X}_i) \Delta + g(t_i, \bar{X}_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s) ds \\ &\quad + h(t_i, \bar{X}_i) \Delta W + \frac{1}{2} \left(h \frac{\partial h}{\partial x}(t_i, \bar{X}_i) \right) ((\Delta W)^2 - \Delta). \end{aligned}$$

Mit der gewöhnlichen deterministischen Taylor-Entwicklung für h im Punkt (t_i, \bar{X}_i) erhalten wir für $h(t_i, \bar{X}_i + f(t_i, \bar{X}_i) \Delta + g(t_i, \bar{X}_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s) ds + h(t_i, \bar{X}_i) \sqrt{\Delta})$:

$$\begin{aligned} &h(t_i, \bar{X}_i + f(t_i, \bar{X}_i) \Delta + g(t_i, \bar{X}_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s) ds + h(t_i, \bar{X}_i) \sqrt{\Delta}) \\ &= h(t_i, \bar{X}_i) + \frac{\partial h}{\partial x}(t_i, \bar{X}_i) \cdot \left(f(t_i, \bar{X}_i) \Delta + g(t_i, \bar{X}_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s) ds + h(t_i, \bar{X}_i) \sqrt{\Delta} \right) \\ &\quad + O \left(f(t_i, \bar{X}_i) \Delta + g(t_i, \bar{X}_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s) ds + h(t_i, \bar{X}_i) \sqrt{\Delta} \right)^2. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich als Näherung für $h \frac{\partial h}{\partial x}$:

$$h(t_i, \bar{X}_i) \frac{\partial h}{\partial x}(t_i, \bar{X}_i) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (h(t_i, \bar{\Upsilon}_i) - h(t_i, \bar{X}_i)) + O(\Delta)$$

wobei

$$\bar{\Upsilon}_i := \bar{X}_i + f(t_i, \bar{X}_i)\Delta + g(t_i, \bar{X}_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s) ds + h(t_i, \bar{X}_i)\sqrt{\Delta}. \quad (3.37)$$

Es folgt weiter

$$\begin{aligned} & h(t_i, \bar{X}_i) \frac{\partial h}{\partial x}(t_i, \bar{X}_i) \cdot ((\Delta W)^2 - \Delta) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}} (h(t_i, \bar{\Upsilon}_i) - h(t_i, \bar{X}_i)) + O(\Delta) \right) \cdot ((\Delta W)^2 - \Delta) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}} (h(t_i, \bar{\Upsilon}_i) - h(t_i, \bar{X}_i)) \right) \cdot ((\Delta W)^2 - \Delta) + O(\Delta^2). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Der Restterm dieser Näherung ist also von der höheren Ordnung wie der Fehler des Verfahrens, daher können wir $h(t_i, \bar{X}_i) \frac{\partial h}{\partial x}(t_i, \bar{X}_i) \cdot ((\Delta W)^2 - \Delta)$ im Milstein-Schema durch (3.38) ersetzen, ohne den globalen Fehler des Verfahrens zu reduzieren. Auf diese Weise erhalten wir das ableitungsfreie Schema der starken Ordnung $\gamma = 1$ im 1-dimensionalen Fall mit skalarer Kontrolle und skalarlem Wiener-Prozess

$$\begin{aligned} \bar{X}_{0,X_0}(t_{i+1}) &= \bar{X}_{0,X_0}(t_i) + f(t_i, \bar{X}_i)\Delta + g(t_i, \bar{X}_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s) ds \\ &\quad + h(t_i, \bar{X}_i)\Delta W + \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} (h(t_i, \bar{\Upsilon}_i) - h(t_i, \bar{X}_i)) ((\Delta W)^2 - \Delta) \end{aligned}$$

mit $\bar{\Upsilon}_i$ wie in (3.37) definiert.

Im allgemeinen mehrdimensionalen Fall mit $d, k, m = 1, 2, \dots$ ist die μ -te Komponente eines ableitungsfreien Schemas der starken Ordnung $\gamma = 1$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{X}_{0,X_0}^\mu(t_{i+1}) &= \bar{X}_{0,X_0}^\mu(t_i) + f_\mu(t_i, \bar{X}_i)\Delta + \sum_{j=1}^k g_{\mu,j}(t_i, \bar{X}_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u^j(s) ds \\ &\quad + \sum_{r=1}^m h_{\mu,r}(t_i, \bar{X}_i)\Delta W^r + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{r_1, r_2=1}^m \{h_{\mu,r_2}(t_i, \bar{\Upsilon}_i^{r_1}) - h_{\mu,r_2}(t_i, \bar{X}_i)\} I_{(\bar{r}_1, \bar{r}_2)} \end{aligned}$$

mit vektorwertigen

$$\bar{\Upsilon}_i^r := \bar{X}_i + f(t_i, \bar{X}_i)\Delta + \sum_{j=1}^k g^{(j)}(t_i, \bar{X}_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u^j(s) ds + h^{(r)}(t_i, \bar{X}_i)\sqrt{\Delta}$$

für $r = 1, 2, \dots, m$.

Analog kann man ableitungsfreie starke Schemata höherer Ordnungen erhalten. Für ableitungsfreie Schemata für stochastische Systeme ohne Kontrolle siehe [9], Kapitel 11.

3.4 Numerische Beispiele für starke Approximationen

Eine wichtige Anwendung der starken Approximationen ist die direkte Simulation von Trajektorien. Die ersten beiden Beispiele sind so konstruiert, dass wir für sie die exakte Lösung angeben können. Daher sind sie besonders geeignet, um die approximierten Pfade mit den exakten zu vergleichen, und um die Ordnung der Verfahren nachzuweisen. Das dritte Beispiel ist eine wichtige praktische Anwendung von stochastischen affinen Kontrollsystemen, das das Verhältnis von zwei Populationen (Räuber und Beute) beschreibt. Für dieses System ist keine exakte Lösung bekannt, daher kann eine direkte Simulation der Trajektorien nützliche Informationen oder Vermutungen über das qualitative Verhalten des untersuchten Modells liefern. Alle unten aufgeführten Simulationen und Graphiken wurden mit dem Computeralgebrasystem MAPLE erstellt.

3.4.1 Ein zweidimensionales stochastisches affines Kontrollsystem

Seien $d = 2$, $k = m = 1$ und

$$\begin{aligned} d \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt + u(t) \begin{pmatrix} -0,01 \\ 0,1 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} dW(t), \\ &0 \leq t \leq 1. \end{aligned} \tag{3.39}$$

bzw. komponentenweise

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= (X_2(t) - u(t)) dt + t dW(t) \\ dX_2(t) &= u(t)dt + dW(t). \end{aligned}$$

Dieses System hat die exakte Lösung

$$\begin{aligned} X_1(t) &= I_{(\underline{1},0),0,t} - I_{(\underline{1},0),0,t} + tW(t) \\ X_2(t) &= I_{(\underline{1},0),0,t} + W(t). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Wir betrachten hier die Kontrolle $u(t) = \sin\left(\frac{40}{t}\right)$. Die Funktion h ist in diesem Beispiel unabhängig von X , deshalb sind das Euler- und Milstein-Verfahren identisch. Daher besitzt das Euler-Schema für dieses System bereits die starke Ordnung $\gamma = 1$, die man durch Simulationen mit MAPLE auch veranschaulichen kann. Die Abbildung 3.1 zeigt jeweils die exakte Lösung¹ und eine Approximation mit dem Euler-Verfahren für die Komponenten $X_1(t)$ und $X_2(t)$. Die Approximationen wurden mit der Schrittweite $\Delta = 2^{-4}$ erstellt.

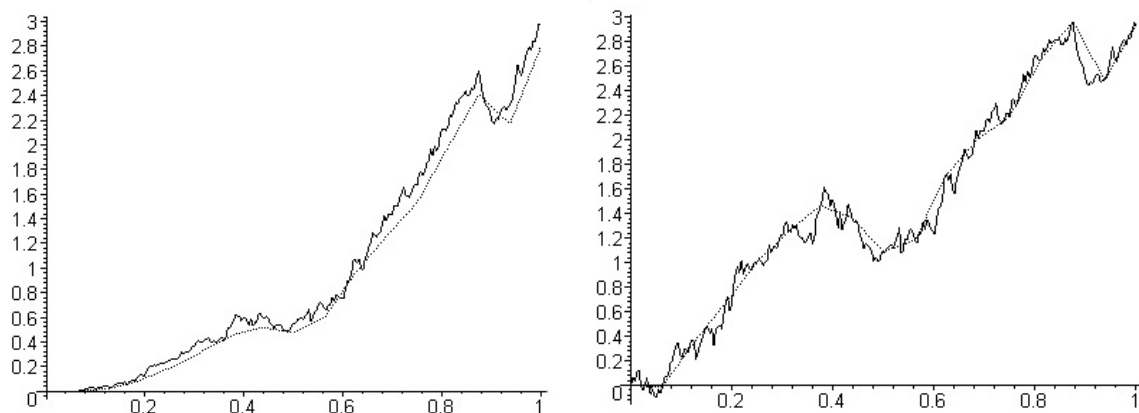


Abbildung 3.1: Exakte Lösung und Euler-Approximation für $X_1(t)$ und $X_2(t)$.

Um die Fehlerordnung des Verfahrens nachzuweisen, berechnen wir für jeden Pfad des Wiener-Prozesses jeweils die exakte Lösung und die Euler-Approximation für die

¹Für die exakte Lösung wurde hier und im Weiteren der Wiener-Prozess mit Hilfe des Algorithmus aus dem Anhang B.2 mit der Schrittweite 2^{-8} simuliert.

Schrittweiten $\Delta = 2^{-N}$ mit $N = 1, 2, 3, 4$ im Punkt $T = 1$. Der Fehler wird für jede Schrittweite gemäß

$$\left(E |X_{0,X_0}(T) - \bar{X}_{0,X_0}(T)|_2^2\right)^{1/2} \quad (3.41)$$

berechnet, wobei der Erwartungswert als Mittelwert der Ergebnisse von 10000 Experimenten zu verschiedenen Wiener-Prozessen approximiert wird. Die Abbildung 3.2 zeigt den Fehler über Δ in doppellogarithmischer Skalierung und die Funktion $y = x$ zum Vergleich. Man sieht deutlich, dass die beiden Geraden die gleiche Steigung haben. Das starke Euler-Verfahren hat also in diesem Fall tatsächlich die Ordnung $\gamma = 1$.

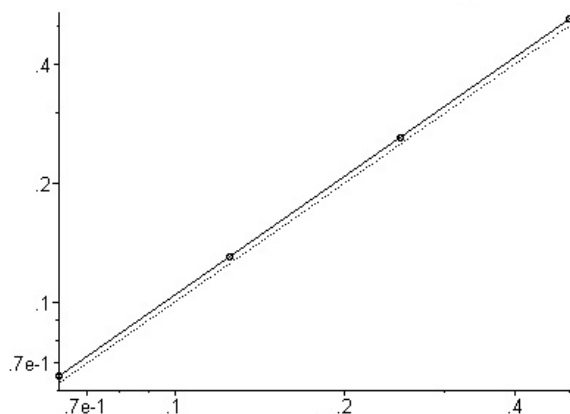


Abbildung 3.2: Fehler des Milstein-Verfahrens (schwarz) und Gerade $y = x$ (gestrichelt) in log-log-Skalierung.

3.4.2 Eine skalare stochastische Differentialgleichung mit Kontrolle

Sei $d = k = m = 1$ und

$$\begin{aligned} dX(t) &= u(t)X(t)dt + 2X(t)dW(t) \\ X(0) &= 1. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Diese stochastische Differentialgleichung hat die exakte Lösung

$$X(t) = X(0) \cdot \exp \left(\int_0^t u(s) ds - \frac{b^2}{2}t + 2W(t) \right). \quad (3.43)$$

Wir betrachten wieder die Kontrolle $u(t) = \sin\left(\frac{40}{t}\right)$ auf dem Zeitintervall $[0, 1]$. Der Wert von u an der Stelle $t = 0$ ist unerheblich. Wir haben mit $u(0) = 0$ gerechnet. Die Abbildung 3.3 zeigt die exakte Lösung $X(t)$ und Approximationen mit Euler- und Milstein-Verfahren. Man erkennt deutlich, dass das Milstein-Verfahren eine wesentlich bessere Näherung liefert.

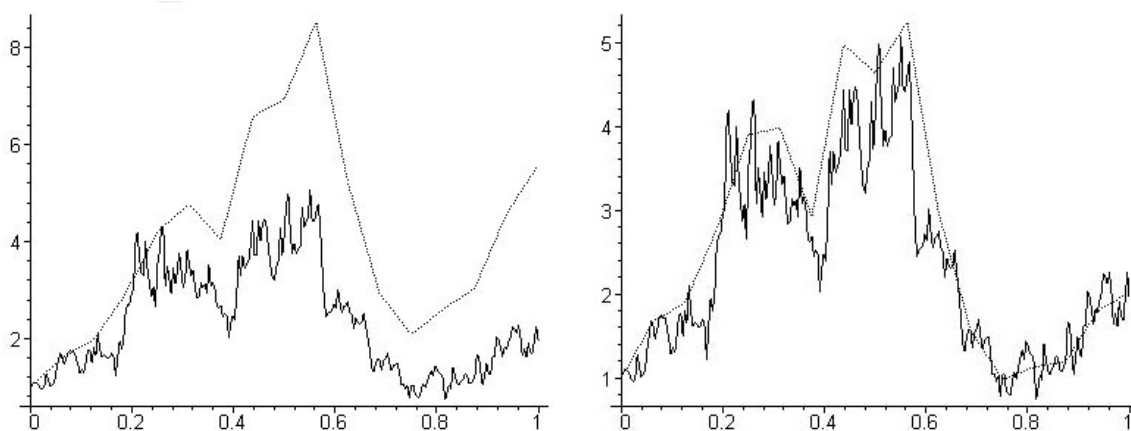


Abbildung 3.3: Exakte Lösung $X(t)$ mit Euler- (links) und Milstein-Verfahren (rechts).

Wir veranschaulichen an diesem Beispiel die Tatsache, dass das Euler-Verfahren hier im Unterschied zum Milstein-Verfahren die starke Ordnung $\gamma = \frac{1}{2}$ besitzt. Dafür wurden für 1000 verschiedene Wiener-Prozesse jeweils die exakte Lösung und Approximationen mit Schrittweiten $\Delta = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}$ und 2^{-4} berechnet. Der Erwartungswert der Fehler $|X_{0,1}(1) - \overline{X}_{0,1}(1)|^2$ wurde durch den Mittelwert approximiert. In doppellogarithmischer Darstellung 3.4 ergibt sich für das Euler-Verfahren eine Gerade, die die Steigung $\frac{1}{2}$ hat und für das Milstein-Verfahren eine Gerade, die die Steigung 1 aufweist.

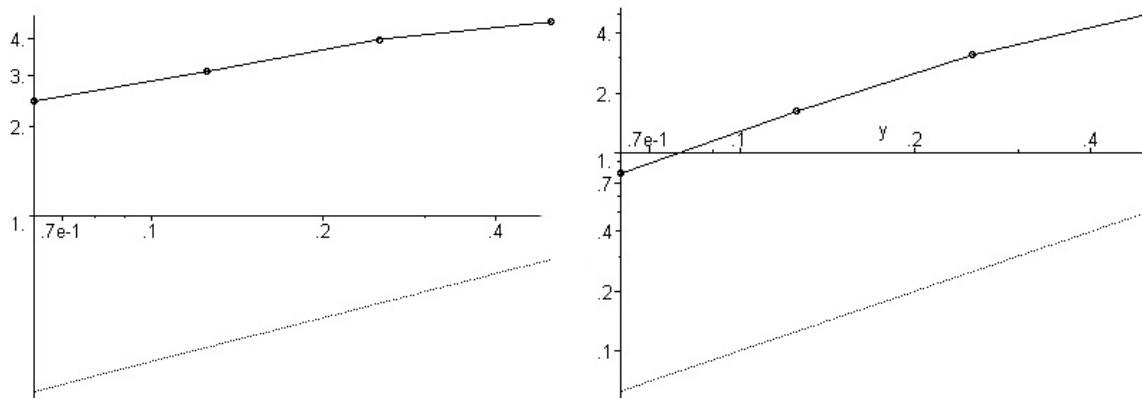


Abbildung 3.4: Fehler des Euler-Verfahrens über Δ im Vergleich zur Geraden $y = \frac{1}{2}x$ (links) und des Milstein-Verfahrens im Vergleich zur Geraden $y = x$ (rechts).

3.4.3 Das Räuber-Beute-Modell

Die Wechselwirkungen zwischen zwei verschiedenen Populationen können sehr unterschiedlicher Natur sein. Ein in der Literatur oft beschriebenes deterministisches Modell ist das *Lotka-Volterra-System*, wo eine Population (Räuber) die andere (Beute) jagt²:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) (a_0 + a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) (b_0 + b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t)).\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen x_1 und x_2 die Größe (z.B. die Biomasse) der Populationen zweier Spezies in einem begrenzten Lebensraum. Die anderen Parameter werden in diesem Beispiel mit folgenden Werten belegt:

- $a_0 = 1,04$: Geburtenrate der Beute
- $a_1 = -0,01$: Stressfaktor der Beute, abhängig von vorhandenen Individuen eigener Art
- $a_2 = -0,07$: Sterberate der Beute, abhängig von vorhandenen Räubern
- $b_0 = -1,01$: Sterberate der Räuber
- $b_1 = 1,01$: Geburtenrate der Räuber, abhängig von vorhandener Beute
- $b_2 = -0,01$: Stressfaktor der Räuber, abhängig von vorhandenen Individuen eigener Art

²dieses spezielle Modell wurde der Arbeit [12] von W. Semmler und M. Sieveking entnommen

Nun wird in dieses System noch eine Partei einbezogen, die wir als Kontrolle interpretieren. Eine Kontrolle kann auf verschiedene Weise erfolgen. Man kann zum Beispiel die Räuber- oder die Beutepopulation dezimieren oder vergrößern, oder die Umgebung so verändern dass eine oder mehrere Konstanten $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ sich ändern. Wir nehmen hier an, dass die dritte Partei, z.B. Jäger oder Fischer, beide Populationen gleichermaßen dezimieren, mit einer konstanten Rate $u(t) = 0,5$. Wir erhalten ein deterministisches affines Kontrollsystem

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= X_1(t) (a_0 + a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)) dt + u(t) dt \\ dX_2(t) &= X_2(t) (b_0 + b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t)) dt + u(t) dt. \end{aligned}$$

Dieses System läuft auf ein Gleichgewicht zu, die Trajektorien zu verschiedenen Anfangswerten sind also spiralförmig:

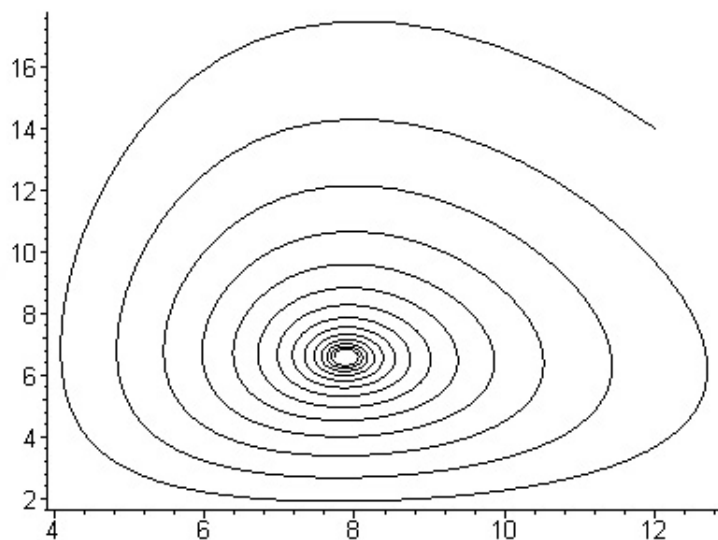


Abbildung 3.5: Räuber-Beute-Modell mit konstanter Kontrolle $u = 0,5$.

Nehmen wir an, dass die Wachstumsparameter a_0 und b_0 von einer zufälligen Komponente beeinflusst werden, so kommen wir auf ein stochastisches affines Kontrollsystem, das man mit obigen Verfahren numerisch approximieren kann:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= X_1(t) (a_0 + a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)) dt + u(t) dt + \sigma_1 X_1(t) dW^1(t) \\ dX_2(t) &= X_2(t) (b_0 + b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t)) dt + u(t) dt + \sigma_2 X_2(t) dW^2(t). \end{aligned}$$

Wir wählen hier $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$.

In Abbildung 3.6 ist eine numerische Lösung mit dem Euler-Verfahren für den Zeithorizont $0 \leq t \leq 30$ dargestellt. Sie spiegelt deutlich den Einfluß von zufälligen Störungen auf das System wider. Nichtsdestotrotz ist erkennbar, dass die Tendenz erhalten bleibt: Das System strebt im Mittel auf ein Gleichgewicht zu. Das Verfahren scheint also zur Approximation der Pfade dieses gestörten Systems gut geeignet zu sein.

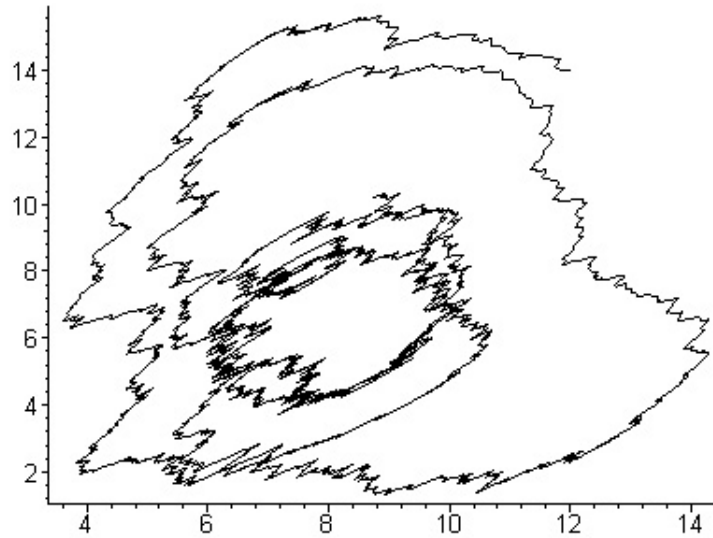


Abbildung 3.6: Gestörtes Räuber-Beute Modell mit affiner Kontrolle

Kapitel 4

Schwache Approximationen

Während man bei starken Approximationen versucht die exakte Lösung pfadweise zu approximieren, gibt es eine Reihe von Problemen, bei denen man nicht an der exakten Lösung selbst interessiert ist, sondern eher an der Approximation von Momenten, Erwartungen oder anderen Funktionalen des Ito-Prozesses, welche normalerweise nicht analytisch bestimmt werden können. Da die Anforderungen an solche Simulationen anders (schwächer) sind, als die an pfadweise Approximationen, ist es sinnvoll, solche Probleme zu einer separaten Klasse zusammenzufassen. Man spricht in diesem Fall von *schwachen* Approximationen, denen wir uns in diesem Kapitel widmen.

Wie früher sei X die Lösung des stochastischen affinen Kontrollsystems

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt + \sum_{j=1}^k g^{(j)}(t, X(t)) w^j(t) dt + \sum_{r=1}^m h^{(r)}(t, X(t)) dW^r(t) \quad (4.1)$$

zur Anfangsbedingung $X(0) = X_0$, d.h. $X(t) = X_{0, X_0}(t)$.

Wir betrachten Diskretisierungen

$$0 = t_0 \leq \dots \leq t_N = T \quad (4.2)$$

von $[0, T]$ mit Schrittweiten $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$, für $i = 0, \dots, N-1$ und maximaler Schrittweite

$$\Delta_{\max} = \max_{0 \leq i \leq N-1} (t_{i+1} - t_i).$$

Sei \overline{X} ein numerisches Verfahren, das auf einer Folge von Diskretisierungen des obigen Typs basiert.

Wir beginnen mit folgender Hilfsdefinition:

Definition 4.0.1 *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ist polynomial wachsend, wenn es Konstanten $K > 0$, $\kappa > 0$ gibt, derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ die Ungleichung*

$$|f(x)| \leq K (1 + |x|_2^\kappa) \quad (4.3)$$

gilt.

Eine Funktion $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ist polynomial wachsend bezüglich der Variable x , wenn es Konstanten $K > 0$, $\kappa > 0$ gibt, derart, dass für alle $t \in [0, T]$ und für alle $x \in \mathbb{R}^d$ die Ungleichung

$$|f(t, x)| \leq K (1 + |x|_2^\kappa) \quad (4.4)$$

gilt.

Wir sagen in beiden Fällen kurz, f gehört zur Klasse \mathcal{P} .

Gemäß dem Zweck und den Anforderungen an schwache Approximationen, können wir nun diese formal wie folgt definieren:

Definition 4.0.2 *Ein numerisches Verfahren \overline{X} hat die schwache Ordnung β , wenn zu jeder Funktion $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, die $2\beta + 2$ -mal stetig differenzierbar ist und zusammen mit ihren partiellen Ableitungen bis zu und einschließlich der Ordnung $2\beta + 2$ zur Klasse \mathcal{P} gehört, eine Konstante K_g existiert, derart, dass für alle N und alle $i = 0, \dots, N$ die Abschätzung*

$$|Eg(X_{0,X_0}(t_i)) - Eg(\overline{X}_{0,X_0}(t_i))| \leq K_g \Delta_{\max}^\beta \quad (4.5)$$

gilt.

4.1 Bedingungen für schwache Konvergenz

Unser Ziel ist es, herauszufinden, wie die hierarchische Menge \mathcal{A} zu wählen ist, damit ein auf einer abgeschnittenen Ito-Taylor-Entwicklung mit hierarchischer Menge \mathcal{A} basierendes Ito-Taylor-Verfahren im schwachen Sinne mit der Ordnung $\beta \in \mathbb{N}$ konvergiert.

Um dies feststellen zu können, werden wir, ähnlich wie im Kapitel 3, Bedingungen an die Einschrittapproximation $\bar{X}_{t,x}(t + \Delta)$ ausnutzen, unter denen das schwache Konvergenzkriterium (4.5) erfüllt ist. Diesen Zusammenhang liefert uns das folgende Theorem (siehe Milstein [10], Theorem 9.1):

Theorem 4.1.1 *Gegeben sei ein affines stochastisches Kontrollsystem (4.1). Die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeigkeitssatzes 2.1.2 seien erfüllt. Sei $\beta \in \mathbb{N}$ und es gelte:*

- (i) : *Die Koeffizientenfunktionen f_i für $i = 1, \dots, d$, $g_{i,j}$ für $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, k$ und $h_{i,j}$ für $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, m$ gehören zusammen mit ihren partiellen Ableitungen nach x bis zu und einschließlich der Ordnung $2\beta + 2$ zur Klasse \mathcal{P} .*
- (ii) : *Es existieren sämtliche Momente der Anfangsbedingung, d.h.*

$$E(|X_0|_2^r) < \infty$$

für $r = 1, 2, \dots$

- (iii) : *Das Verfahren \bar{X} sei so beschaffen, dass die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:*

Für jedes $s = 1, \dots, 2\beta + 1$ und beliebiges $0 \leq t \leq T - \Delta$ gelte

$$\left| E \left(\prod_{j=1}^s \left(X_{t,x}^{i_j}(t + \Delta) - x^{i_j} \right) - \prod_{j=1}^s \left(\bar{X}_{t,x}^{i_j}(t + \Delta) - x^{i_j} \right) \right) \right| \leq P(x) \Delta^{\beta+1} \quad (4.6)$$

für alle $(i_1, \dots, i_s) \in \{1, \dots, d\}$, wobei P eine Funktion der Klasse \mathcal{P} ist.

Für alle $(i_1, \dots, i_{2\beta+2}) \in \{1, \dots, d\}^{2\beta+2}$ gelte

$$E \left(\prod_{j=1}^{2\beta+2} \left| \bar{X}_{t,x}^{i_j}(t + \Delta) - x^{i_j} \right| \right) \leq P(x) \Delta^{\beta+1} \quad (4.7)$$

mit $P \in \mathcal{P}$.

Dann ist für jede Funktion g mit den Eigenschaften aus Definition 4.0.2 und für jede Diskretisierung (4.2) und für alle $i = 0, 1, \dots, N$ die folgende Ungleichung erfüllt:

$$|Eg(X_{0,X_0}(t_i)) - Eg(\bar{X}_{0,X_0}(t_i))| \leq K_g \Delta_{\max}^\beta, \quad (4.8)$$

d.h. das Verfahren \bar{X} hat die Fehlerordnung β im Sinne der schwachen Konvergenz. Für eine feste Diskretisierung (4.2) gilt die Abschätzung (4.8), wenn die unter (ii) aufgeführten Bedingungen für $t = t_n$ und $\Delta = \Delta_n$ für $n = 0, \dots, N-1$ erfüllt sind.

Beweis: Zum Beweis dieses Theorems sei lediglich angemerkt, dass er ähnlich wie der Beweis des Analogons für gewöhnliche stochastische Differentialgleichungen bei Milstein verläuft. Die einzige für stochastische affine Kontrollsysteme abweichende Behauptung wurde von uns bereits im Kapitel 3 als Lemma 3.1.4 formuliert und bewiesen. \square

Ab jetzt sei \bar{X} ein Ito-Taylor-Verfahren, dessen Einschrittapproximationen auf einer abgeschnittenen Ito-Taylor-Entwicklung

$$\hat{X}_{t,x}(t + \Delta) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha(t, x) I_{\alpha,t,t+\Delta} \quad (4.9)$$

basieren und durch

$$\bar{X}_{t,x}(t + \Delta) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha(t, x) \bar{I}_{\alpha,t,t+\Delta} \quad (4.10)$$

definiert werden. Dabei sind die $\bar{I}_{\alpha,t,t+\Delta}$ geeignete numerische Realisierungen der mehrfachen Ito-Kontroll-Integrale $I_{\alpha,t,t+\Delta}$. Wir widmen uns im nächsten Abschnitt der Konstruktion der hierarchischen Menge \mathcal{A} . Die Wahl der Zufallsvariablen $\bar{I}_{\alpha,t,t+\Delta}$ geschieht im Abschnitt 4.3.

4.2 Bestimmung der hierarchischen Menge für schwache Approximationen

Wir beginnen mit einigen nützlichen Lemmata über Produkte von mehrfachen Ito-Kontrollintegralen. Das erste Lemma behandelt das Produkt von zwei mehrfachen Ito-Kontrollintegralen über die Zufallsvariable $Z \equiv 1$.

Lemma 4.2.1 Seien $\alpha = (j_1, \dots, j_l)$, $\beta = (j'_1, \dots, j'_p) \in \mathcal{M}_{k,m}$ mit $l, p \in \{1, 2, \dots\}$ und $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} I_{\alpha, \rho, \tau} \cdot I_{\beta, \rho, \tau} &= \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha, \rho, s} \cdot I_{\beta-, \rho, s} dW^{j'_p}(s) + \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha-, \rho, s} \cdot I_{\beta, \rho, s} dW^{j_l}(s) \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{j_l = j'_p \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}\}} \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha-, \rho, s} \cdot I_{\beta-, \rho, s} ds \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dabei ist $dW^j(s)$ für $j \in \{0\} \cup \{\bar{1}, \dots, \bar{k}\}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} dW^0(s) &= ds \\ dW^j(s) &= u^j(s) ds \text{ für } j \in \{\bar{1}, \dots, \bar{k}\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Beweis: Wir betrachten den stochastischen multidimensionalen Prozess

$$X = \{X(t), t \geq \rho\},$$

definiert durch

$$X(t) = \begin{pmatrix} X^{\odot}(t) \\ X^{(0)}(t) \\ \vdots \\ X^{(m)}(t) \\ X^{(0,0)}(t) \\ \vdots \\ X^{(\bar{m}, \dots, \bar{m})}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\odot, \rho, t} \\ I_{(0), \rho, t} \\ \vdots \\ I_{(m), \rho, t} \\ I_{(0,0), \rho, t} \\ \vdots \\ I_{(\bar{m}, \dots, \bar{m}), \rho, t} \end{pmatrix},$$

wobei der Komponentenindex alle Multiindizes bis zu und einschließlich der Länge $\max(l, p)$ durchläuft.

Jede Komponente von $X(t)$ stellt also ein mehrfaches Ito-Kontrollintegral dar, und kann als Lösung eines skalaren affinen stochastischen Kontrollsystems geschrieben werden.

Für $\gamma = (\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_r)$ ist

$$\begin{aligned} X^{\gamma}(\tau) &= X^{\gamma}(\rho) + \int_{\rho}^{\tau} f^{\gamma}(s, X(s)) ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^k \int_{\rho}^{\tau} g^{\gamma, j}(s, X(s)) u^j(s) ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \int_{\rho}^{\tau} h^{\gamma, j}(s, X(s)) dW^j(s), \end{aligned}$$

wobei die Funktionen $f^\gamma, g^{\gamma,j}$ und $h^{\gamma,j}$ wie folgt definiert sind:

$$f^\gamma = \begin{cases} x^{\gamma^-} = I_{\gamma^-, \rho, \cdot} & , \text{ falls } \hat{j}_r = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} , \quad (4.13)$$

$$g^{\gamma,j} = \begin{cases} x^{\gamma^-} = I_{\gamma^-, \rho, \cdot} & , \text{ falls } \underline{j} = \hat{j}_r \in \{\underline{1}, \dots, \underline{k}\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} , \quad (4.14)$$

für $j = 1, \dots, k$.

$$h^{\gamma,j} = \begin{cases} x^{\gamma^-} = I_{\gamma^-, \rho, \cdot} & , \text{ falls } \bar{j} = \hat{j}_r \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} , \quad (4.15)$$

für $j = 1, \dots, m$.

Nun definieren wir für gegebene Multiindizes $\alpha = (j_1, \dots, j_l)$, $\beta = (j'_1, \dots, j'_p) \in \mathcal{M}_{k,m}$ die Funktion $F(t, x) := x^\alpha \cdot x^\beta$.

Dann ergibt sich für den stochastischen Prozess $Y(t) = X^\alpha(t) \cdot X^\beta(t)$ mit der Kettenregel (2.10):

$$\begin{aligned} Y(\tau) &= X^\alpha(\tau) \cdot X^\beta(\tau) = I_{\alpha, \rho, \tau} \cdot I_{\beta, \rho, \tau} \\ &= I_{\alpha, \rho, \rho} \cdot I_{\beta, \rho, \rho} + \int_\rho^\tau f^\alpha(s, X(s)) I_{\beta, \rho, s} ds \\ &\quad + \int_\rho^\tau f^\beta(s, X(s)) I_{\alpha, \rho, s} ds + \sum_{j=1}^m \int_\rho^\tau h^{\alpha,j}(s, X(s)) h^{\beta,j}(s, X(s)) ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^k \int_\rho^\tau g^{\alpha,j}(s, X(s)) u^j(s) I_{\beta, \rho, s} ds + \sum_{j=1}^k \int_\rho^\tau g^{\beta,j}(s, X(s)) u^j(s) I_{\alpha, \rho, s} ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \int_\rho^\tau h^{\alpha,j}(s, X(s)) I_{\beta, \rho, s} dW^j(s) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \int_\rho^\tau h^{\beta,j}(s, X(s)) I_{\alpha, \rho, s} dW^j(s). \end{aligned}$$

Gemäß der Definitionen (4.13), (4.14) und (4.15) ergeben sich daraus in Abhängigkeit von j_l und j'_p Gleichungen von einfacher Gestalt. Wir unterscheiden die folgenden sechs fundamentalen Fälle:

1. $j_l = j'_p = 0$. Dann ist

$$I_{\alpha,\rho,\tau} \cdot I_{\beta,\rho,\tau} = \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha-, \rho, s} I_{\beta, \rho, s} ds + \int_{\rho}^{\tau} I_{\beta-, \rho, s} I_{\alpha, \rho, s} ds.$$

2. $j_l = 0, j'_p \in \{\underline{1}, \dots, \underline{k}\}$. Dann

$$I_{\alpha,\rho,\tau} \cdot I_{\beta,\rho,\tau} = \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha-, \rho, s} I_{\beta, \rho, s} ds + \int_{\rho}^{\tau} I_{\beta-, \rho, s} u^{j'_p}(s) I_{\alpha, \rho, s} ds.$$

3. $j_l = 0, j'_p \in \{\overline{1}, \dots, \overline{m}\}$. Dann

$$I_{\alpha,\rho,\tau} \cdot I_{\beta,\rho,\tau} = \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha-, \rho, s} I_{\beta, \rho, s} ds + \int_{\rho}^{\tau} I_{\beta-, \rho, s} I_{\alpha, \rho, s} dW^{j'_p}(s).$$

4. $j_l, j'_p \in \{\underline{1}, \dots, \underline{k}\}$. Dann

$$I_{\alpha,\rho,\tau} \cdot I_{\beta,\rho,\tau} = \int_{\rho}^{\tau} I_{\beta-, \rho, s} u^{j'_p}(s) I_{\alpha, \rho, s} ds + \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha-, \rho, s} u^{j_l}(s) I_{\beta, \rho, s} ds.$$

5. $j_l \in \{\underline{1}, \dots, \underline{k}\}, j'_p \in \{\overline{1}, \dots, \overline{m}\}$. In diesem Fall gilt

$$I_{\alpha,\rho,\tau} \cdot I_{\beta,\rho,\tau} = \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha-, \rho, s} u^{j_l}(s) I_{\beta, \rho, s} ds + \int_{\rho}^{\tau} I_{\beta-, \rho, s} I_{\alpha, \rho, s} dW^{j'_p}(s).$$

6. $j_l, j'_p \in \{\overline{1}, \dots, \overline{m}\}$. Dann

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\rho,\tau} \cdot I_{\beta,\rho,\tau} &= \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha-, \rho, s} I_{\beta, \rho, s} dW^{j_l}(s) + \int_{\rho}^{\tau} I_{\beta-, \rho, s} I_{\alpha, \rho, s} dW^{j'_p}(s) \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{j_l=j'_p \in \{\overline{1}, \dots, \overline{m}\}\}} \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha-, \rho, s} I_{\beta-, \rho, s} ds. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{1}_{\{j_l=j'_p \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}\}}$ die folgende charakteristische Funktion

$$\mathbf{1}_{\{j_l=j'_p \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}\}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j_l, j'_p \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\} \text{ und } j_l = j'_p \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Mit den Bezeichnungen (4.13) für $dW^j(s)$ kann man alle Fälle zu einer Formel zusammenfassen:

$$\begin{aligned} I_{\alpha, \rho, \tau} \cdot I_{\beta, \rho, \tau} &= \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha, \rho, s} \cdot I_{\beta-, \rho, s} dW^{j'_p}(s) + \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha-, \rho, s} \cdot I_{\beta, \rho, s} dW^{j_l}(s) \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{j_l=j'_p \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}\}} \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha-, \rho, s} \cdot I_{\beta-, \rho, s} ds. \end{aligned}$$

Das Lemma ist somit bewiesen. \square

Das nächste Lemma besagt, dass ein endliches Produkt mehrfacher Ito-Kontroll-Integrale als eine endliche Summe von mehrfachen Integralen zu anderen Multiindizes dargestellt werden kann. Mehr sogar, die Summe aus Länge, Anzahl der Nullen und Anzahl der Komponenten mit einem Unterstrich in allen Multiindizes im Produkt bleibt in jedem Summanden der resultierenden Summe erhalten.

Lemma 4.2.2 *Seien $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$, $q \geq 2$ eine natürliche Zahl und $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(q)} \in \mathcal{M}_{k, m}$. Dann existieren $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(r)} \in \mathcal{M}_{k, m}$, derart, dass die Identität*

$$\prod_{i=1}^q I_{\alpha^{(i)}, \rho, \tau} = \sum_{j=1}^r I_{\gamma^{(j)}, \rho, \tau} \quad (4.16)$$

erfüllt ist, wobei $r = r(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(q)}) \geq 2$ gilt. Ferner gilt für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$ die Beziehung

$$l(\gamma^{(j)}) + n(\gamma^{(j)}) + o(\gamma^{(j)}) = \sum_{i=1}^q (l(\alpha^{(i)}) + n(\alpha^{(i)}) + o(\alpha^{(i)})). \quad (4.17)$$

Beweis: Mit folgenden Überlegungen ergibt sich das Resultat direkt aus dem Lemma 4.2.1.

Sei $q = 2$ und $\alpha^{(1)} = (j_1, \dots, j_l)$, $\alpha^{(2)} = (j'_1, \dots, j'_p)$. Für das Produkt $I_{\alpha^{(1)}, \rho, \tau} I_{\alpha^{(2)}, \rho, \tau}$ ergibt sich nach Lemma 4.2.1:

$$\begin{aligned} I_{\alpha^{(1)}, \rho, \tau} I_{\alpha^{(2)}, \rho, \tau} &= \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha^{(1)}, \rho, s} I_{\alpha^{(2)}-, \rho, s} dW^{j'_p}(s) \\ &\quad + \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha^{(1)}-, \rho, s} I_{\alpha^{(2)}, \rho, s} dW^{j_l}(s) \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{j_l=j'_p \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}\}} \cdot \int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha^{(1)}-, \rho, s} I_{\alpha^{(2)}-, \rho, s} ds. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Nun können wir rekursiv die in jedem Summanden auftretenden Produkte von Integralen mit der Formel (4.12) auswerten. Für das erste Integral in (4.18) ergibt sich zum Beispiel:

$$\begin{aligned} &\int_{\rho}^{\tau} I_{\alpha^{(1)}, \rho, s} I_{\alpha^{(2)}-, \rho, s} dW^{j'_p}(s) \\ &= \int_{\rho}^{\tau} \int_{\rho}^{s_1} I_{\alpha^{(1)}, \rho, s_2} I_{(\alpha^{(2)}-)-, \rho, s_2} dW^{j'_{p-1}}(s_2) dW^{j'_p}(s_1) \\ &\quad + \int_{\rho}^{\tau} \int_{\rho}^{s_1} I_{\alpha^{(1)}-, \rho, s_2} I_{\alpha^{(2)}-, \rho, s_2} dW^{j_l}(s_2) dW^{j'_p}(s_1) \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{j_l=j'_{p-1} \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}\}} \cdot \int_{\rho}^{\tau} \int_{\rho}^{s_1} I_{\alpha^{(1)}-, \rho, s_2} I_{(\alpha^{(2)}-)-, \rho, s_2} ds_2 dW^{j'_p}(s_1). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nachdem wir alle Produkte von stochastischen Kontrollintegralen ausgewertet haben, erhalten wir eine Summe von Integralen $I_{\gamma^{(j)}}$, deren Anzahl r sowohl von l und p abhängt, als auch von den Werten der charakteristischen Funktionen und somit von der Zusammensetzung der Multiindizes $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(2)}$, d.h.

$$I_{\alpha^{(1)}, \rho, \tau} \cdot I_{\alpha^{(2)}, \rho, \tau} = \sum_{j=1}^r I_{\gamma^{(j)}, \rho, \tau}$$

mit $r = r(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$. Offensichtlich gilt für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$ der Zusammenhang

$$l(\gamma^{(j)}) + n(\gamma^{(j)}) + o(\gamma^{(j)}) = \sum_{i=1}^2 (l(\alpha^{(i)}) + n(\alpha^{(i)}) + o(\alpha^{(i)})).$$

Sei nun $q > 2$. Dann können wir $I_{\alpha^{(1)}, \rho, \tau} \cdot I_{\alpha^{(2)}, \rho, \tau}$ mit $I_{\alpha^{(3)}, \rho, \tau}$ multiplizieren, wobei sich wieder eine endliche Summe von mehrfachen Ito-Kontrollintegralen ergibt. Wiederholen

wir diesen Prozess bis alle Integrale $I_{\alpha^{(i)}, \rho, \tau}$, $i = 1, \dots, q$ aufgebraucht sind, so ergibt sich die Behauptung.

Das Lemma ist bewiesen. \square

Das folgende Lemma erlaubt es, den Erwartungswert eines endlichen Produktes mehrfacher Ito-Kontrollintegrale in Abhängigkeit von der Zusammensetzung der einzelnen Multiindizes abzuschätzen.

Für einen Multiindex $\alpha \in \mathcal{M}_{k,m}$ bezeichnen wir mit $\alpha+$ denjenigen Multiindex, der aus α durch Weglassen aller Nullen und aller Komponenten mit einem Unterstrich entsteht. Zum Beispiel, für $\alpha = (\underline{1}, 0, \bar{1}, 0, \bar{2}, \bar{3})$ ist $\alpha+ = (\bar{1}, \bar{2}, \bar{3})$.

Lemma 4.2.3 *Seien $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$, $q \geq 2$ eine natürliche Zahl und $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(q)} \in \mathcal{M}_{k,m}$. Ferner sei λ die Gesamtzahl der Komponenten $j \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}$ in den Multiindizes $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(q)}$, d.h.*

$$\lambda := \sum_{i=1}^q l(\alpha^{(i)}+).$$

Dann gilt:

$$\left| E \left(\prod_{i=1}^q I_{\alpha^{(i)}, \rho, \tau} \right) \right| \begin{cases} = 0, & \text{falls } \lambda \text{ ungerade} \\ \leq K(\tau - \rho)^\kappa, & \text{falls } \lambda \text{ gerade,} \end{cases}$$

wobei

$$\kappa := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q (l(\alpha^{(i)}) + n(\alpha^{(i)}) + o(\alpha^{(i)})).$$

Beweis: Nach Lemma 4.2.2 gilt

$$E \left(\prod_{i=1}^q I_{\alpha^{(i)}, \rho, \tau} \right) = \sum_{j=1}^r E(I_{\gamma^{(j)}, \rho, \tau}) \quad (4.20)$$

für gewisse Multiindizes $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(r)} \in \mathcal{M}_{k,m}$ mit $r = r(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(q)})$. Darüber hinaus haben wir für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$ die Gleichung

$$l(\gamma^{(j)}) + n(\gamma^{(j)}) + o(\gamma^{(j)}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^q (l(\alpha^{(i)}) + n(\alpha^{(i)}) + o(\alpha^{(i)})) \\
&= \sum_{i=1}^q (l(\alpha^{(i)}) - n(\alpha^{(i)}) - o(\alpha^{(i)}) + 2n(\alpha^{(i)}) + 2o(\alpha^{(i)})),
\end{aligned}$$

d.h.

$$\lambda = l(\gamma^{(j)}) + n(\gamma^{(j)}) + o(\gamma^{(j)}) - 2 \sum_{i=1}^q (n(\alpha^{(i)}) + o(\alpha^{(i)})).$$

Ist λ ungerade, so ist die Zahl

$$l(\gamma^{(j)}) + n(\gamma^{(j)}) + o(\gamma^{(j)})$$

nicht durch 2 teilbar und folglich

$$l(\gamma^{(j)}) \neq n(\gamma^{(j)}) + o(\gamma^{(j)}).$$

Somit gehört für jeden der r Multiindizes $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(r)}$ mindestens eine Komponente zur Menge $\{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}$, was

$$E(I_{\gamma^{(j)}, \rho, \tau}) = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, r$$

zur Folge hat. Die Gleichung (4.20) liefert:

$$E\left(\prod_{i=1}^q I_{\alpha^{(i)}, \rho, \tau}\right) = 0.$$

Ist λ gerade, dann können wir $E\left(\prod_{i=1}^q I_{\alpha^{(i)}, \rho, \tau}\right)$ nur abschätzen. Unter Verwendung von (4.20) und der Beschränktheit von u^1, \dots, u^k bekommen wir

$$\begin{aligned}
\left| E\left(\prod_{i=1}^q I_{\alpha^{(i)}, \rho, \tau}\right) \right| &\leq \sum_{j=1}^r |E(I_{\gamma^{(j)}, \rho, \tau})| = \sum_{\{j: l(\gamma^{(j)}) = n(\gamma^{(j)}) + o(\gamma^{(j)})\}} |I_{\gamma^{(j)}, \rho, \tau}| \\
&\leq K \cdot \sum_{\{j: l(\gamma^{(j)}) = n(\gamma^{(j)}) + o(\gamma^{(j)})\}} (\tau - \rho)^{l(\gamma^{(j)})} \\
&\leq K(\tau - \rho)^\kappa
\end{aligned}$$

mit $\kappa = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q (l(\alpha^{(i)}) + n(\alpha^{(i)}) + o(\alpha^{(i)}))$, wobei die letzte Abschätzung eine Konsequenz von

$$l(\gamma^{(j)}) = \frac{1}{2} (l(\gamma^{(j)}) + n(\gamma^{(j)}) + o(\gamma^{(j)})) \quad \text{für} \quad l(\gamma^{(j)}) = n(\gamma^{(j)}) + o(\gamma^{(j)})$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (l(\gamma^{(j)}) + n(\gamma^{(j)}) + o(\gamma^{(j)})) \\ &= \frac{\lambda}{2} + \sum_{i=1}^q (n(\alpha^{(i)}) + o(\alpha^{(i)})) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q (l(\alpha^{(i)}) - n(\alpha^{(i)}) - o(\alpha^{(i)})) + \sum_{i=1}^q (n(\alpha^{(i)}) + o(\alpha^{(i)})) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q (l(\alpha^{(i)}) + n(\alpha^{(i)}) + o(\alpha^{(i)})) \end{aligned}$$

für alle $j \in \{1, \dots, r\}$ ist.

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Im Fall $q = 2$ kann man die Aussage des Lemmas 4.2.3 verschärfen:

Lemma 4.2.4 *Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{M}_{k,m}$ und $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$. Dann gilt:*

$$|E(I_{\alpha, \rho, \tau} \cdot I_{\beta, \rho, \tau})| \begin{cases} = 0, & \text{falls } \alpha+ \neq \beta+ \\ \leq K(\tau - \rho)^\kappa, & \text{falls } \alpha+ = \beta+ , \end{cases}$$

wobei

$$\kappa := \frac{1}{2} (l(\alpha) + n(\alpha) + o(\alpha)) + \frac{1}{2} (l(\beta) + n(\beta) + o(\beta)) .$$

Beweis: Aus (4.20) folgt sofort:

$$E(I_{\alpha, \rho, \tau} \cdot I_{\beta, \rho, \tau}) = E\left(\sum_{j=1}^r I_{\gamma^{(j)}, \rho, \tau}\right) = \sum_{j=1}^r E(I_{\gamma^{(j)}, \rho, \tau})$$

mit $r = r(\alpha, \beta)$ und geeigneten Multiindizes $\gamma^{(j)} \in \mathcal{M}_{k,m}$, $j = 1, \dots, r$.

Die genaue Zusammensetzung der Integrale $I_{\gamma^{(j)}, \rho, \tau}$ ergibt sich nach rekursiver Anwendung der Formel (4.12) — vgl. (4.18) und (4.19).

Ist $\alpha+ \neq \beta+$, so enthalten alle Multiindizes $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(r)}$ mindestens eine Komponente aus der Menge $\{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}$, so dass

$$E(I_{\gamma^{(j)}, \rho, \tau}) = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, r$$

und somit

$$E(I_{\alpha, \rho, \tau} \cdot I_{\beta, \rho, \tau}) = 0 \quad \text{für } \alpha+ \neq \beta+.$$

Im Falle $\alpha+ = \beta+$ gilt folgendes:

Ist $\alpha+ = \beta+ = \odot$, so ist unter Beachtung von Lemma 3.2.1

$$\begin{aligned} |E(I_{\alpha, \rho, \tau} \cdot I_{\beta, \rho, \tau})| &\leq \frac{u_{\max}^{n(\alpha)}}{l(\alpha)!} (\tau - \rho)^{l(\alpha)} \cdot \frac{u_{\max}^{n(\beta)}}{l(\beta)!} (\tau - \rho)^{l(\beta)} \\ &= K(\tau - \rho)^{l(\alpha) + l(\beta)} = K(\tau - \rho)^\kappa, \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} l(\alpha) &= n(\alpha) + o(\alpha), \\ l(\beta) &= n(\beta) + o(\beta). \end{aligned}$$

Ist $\alpha+ = \beta+ \neq \odot$, so folgt aus der Darstellung (4.18)

$$|E(I_{\alpha, \rho, \tau} \cdot I_{\beta, \rho, \tau})| \leq K(\tau - \rho)^{n(\alpha) + o(\alpha) + n(\beta) + o(\beta) + l(\alpha+)} = K(\tau - \rho)^\kappa,$$

denn

$$\begin{aligned} &n(\alpha) + o(\alpha) + n(\beta) + o(\beta) + l(\alpha+) \\ &= n(\alpha) + o(\alpha) + n(\beta) + o(\beta) + \frac{1}{2}(l(\alpha+) + l(\beta+)) \\ &= n(\alpha) + o(\alpha) + \frac{1}{2}(l(\alpha) - n(\alpha) - o(\alpha)) + n(\beta) + o(\beta) + \frac{1}{2}(l(\beta) - n(\beta) - o(\beta)) \\ &= \kappa. \end{aligned}$$

□

Jetzt widmen wir uns der Bedingung (4.6) des Theorems 4.1.1. Unser Ziel ist es, herauszufinden, wie die hierarchische Menge Γ_β beschaffen sein muss, damit die Bedingung (4.6) erfüllt ist. Im Folgenden setzen wir stets $\Delta \leq 1$ voraus.

Sei zunächst $s = 1$. Dann gilt für alle $i = 1, \dots, d$:

$$\begin{aligned}
& \left| E \left(X_{t,x}^i(t + \Delta) - x^i - \bar{X}_{t,x}^i(t + \Delta) + x^i \right) \right| \\
&= \left| E \left(X_{t,x}^i(t + \Delta) - \bar{X}_{t,x}^i(t + \Delta) \right) \right| \\
&= \left| E \left(\sum_{\alpha \in \Gamma_\beta} F_\alpha^i(t, x) (I_{\alpha,t,t+\Delta} - \bar{I}_{\alpha,t,t+\Delta}) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta)} I_\alpha [F_\alpha^i(\cdot, X_{t,x}(\cdot))]_{t,t+\Delta} \right) \right| \\
&\leq \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta)} |F_\alpha^i(t, x)| \cdot |E(I_{\alpha,t,t+\Delta} - \bar{I}_{\alpha,t,t+\Delta})| \\
&\quad + \left| E \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta)} I_\alpha [F_\alpha^i(\cdot, X_{t,x}(\cdot))]_{t,t+\Delta} \right) \right|. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Wegen

$$|F_\alpha^i(t, x)| \leq |F_\alpha(t, x)|_2 \leq K(1 + |x|_2)$$

ergibt sich für den ersten Summanden in (4.21):

$$\sum_{\alpha \in \Gamma_\beta} |F_\alpha^i(t, x)| \cdot |E(I_{\alpha,t,t+\Delta} - \bar{I}_{\alpha,t,t+\Delta})| \leq P(x) \cdot \sum_{\alpha \in \Gamma_\beta} |E(I_{\alpha,t,t+\Delta} - \bar{I}_{\alpha,t,t+\Delta})|$$

mit einer polynomial wachsenden Funktion $P \in \mathcal{P}$. Im Abschnitt 4.3 werden wir die numerischen Realisierungen $\bar{I}_{\alpha,t,t+\Delta}$ so einrichten, dass

$$|E(I_{\alpha,t,t+\Delta} - \bar{I}_{\alpha,t,t+\Delta})| \leq P(x)\Delta^{\beta+1}$$

gilt. Somit ergibt sich für den ersten Summanden in (4.21)

$$\sum_{\alpha \in \Gamma_\beta} |F_\alpha^i(t, x)| \cdot |E(I_{\alpha,t,t+\Delta} - \bar{I}_{\alpha,t,t+\Delta})| \leq P(x)\Delta^{\beta+1}$$

mit $P \in \mathcal{P}$.

Wir betrachten jetzt den zweiten Summanden in (4.21):

$$\begin{aligned}
& \left| E \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta)} I_\alpha [F_\alpha^i(\cdot, X_{t,x}(\cdot))]_{t,t+\Delta} \right) \right| \\
& \leq E \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta)} I_\alpha [|F_\alpha^i(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|]_{t,t+\Delta} \right) \\
& \leq E \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta)} I_\alpha [|F_\alpha(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2]_{t,t+\Delta} \right) \\
& \leq K \cdot \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta): \\ l(\alpha)=n(\alpha)+o(\alpha)}} I_\alpha [E(1 + |X_{t,x}(\cdot)|_2)]_{t,t+\Delta} \\
& \leq K \cdot \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta): \\ l(\alpha)=n(\alpha)+o(\alpha)}} I_\alpha [1 + E |X_{t,x}(\cdot)|_2^2]_{t,t+\Delta} \\
& \leq K \cdot \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta): \\ l(\alpha)=n(\alpha)+o(\alpha)}} I_\alpha \left[1 + E \left(\sup_{t \leq s \leq T} |X_{t,x}(s)|_2^2 \right) \right]_{t,t+\Delta} \\
& \leq K (1 + |x|_2^2) \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta): \\ l(\alpha)=n(\alpha)+o(\alpha)}} I_{\alpha,t,t+\Delta},
\end{aligned}$$

wobei für die letzte Abschätzung die Ungleichung (3.16) benutzt wurde.

Nach Lemma 3.2.1 ergibt sich sofort

$$\begin{aligned}
K (1 + |x|_2^2) \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta): \\ l(\alpha)=n(\alpha)+o(\alpha)}} I_{\alpha,t,t+\Delta} & \leq P(x) \cdot \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta): \\ l(\alpha)=n(\alpha)+o(\alpha)}} \Delta^{l(\alpha)} \\
& \leq P(x) \Delta^{L(\mathcal{R}(\Gamma_\beta))},
\end{aligned}$$

wobei P zur Klasse \mathcal{P} gehört und

$$L(\mathcal{R}(\Gamma_\beta)) = \min_{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta): l(\alpha)=n(\alpha)+o(\alpha)} l(\alpha)$$

— siehe Lemma 3.2.3.

Daraus ergibt sich die erste Forderung an die hierarchische Menge Γ_β :

$$\boxed{\begin{array}{l} \Gamma_\beta \text{ muss so gewählt werden, dass} \\ L(\mathcal{R}(\Gamma_\beta)) \geq \beta + 1 \text{ gilt.} \end{array}} \quad (4.22)$$

Seien nun $s = 2, \dots, 2\beta + 1$. In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned} & \left| E \left(\prod_{j=1}^s \left(X_{t,x}^{i_j}(t + \Delta) - x^{i_j} \right) - \prod_{j=1}^s \left(\bar{X}_{t,x}^{i_j}(t + \Delta) - x^{i_j} \right) \right) \right| \\ &= \left| E \left(\prod_{j=1}^s \left(\sum_{\alpha \in \Gamma_\beta \setminus \{\odot\}} F_\alpha^{i_j}(t, x) I_{\alpha, t, t+\Delta} + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta)} I_\alpha [F_\alpha^{i_j}(\cdot, X_{t,x}(\cdot))]_{t, t+\Delta} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \prod_{j=1}^s \left(\sum_{\alpha \in \Gamma_\beta \setminus \{\odot\}} F_\alpha^{i_j}(t, x) \bar{I}_{\alpha, t, t+\Delta} \right) \right) \right| \\ &\leq \left| E \left(\prod_{j=1}^s \left(\sum_{\alpha \in \Gamma_\beta \setminus \{\odot\}} F_\alpha^{i_j}(t, x) I_{\alpha, t, t+\Delta} \right) - \prod_{j=1}^s \left(\sum_{\alpha \in \Gamma_\beta \setminus \{\odot\}} F_\alpha^{i_j} \bar{I}_{\alpha, t, t+\Delta} \right) \right) \right| \quad (4.23) \\ & \quad + |M| \end{aligned}$$

mit einem Term $|M|$, den wir unten behandeln. Wir betrachten zunächst den ersten Ausdruck in (4.23). Wir multiplizieren die Summen aus und benutzen die Tatsache, dass

$$|F_\alpha^{i_j}(t, x)| \leq |F_\alpha(t, x)|_2 \leq K(1 + |x|_2)$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} & \left| E \left(\prod_{j=1}^s \left(\sum_{\alpha \in \Gamma_\beta \setminus \{\odot\}} F_\alpha^{i_j}(t, x) I_{\alpha, t, t+\Delta} \right) - \prod_{j=1}^s \left(\sum_{\alpha \in \Gamma_\beta \setminus \{\odot\}} F_\alpha^{i_j} \bar{I}_{\alpha, t, t+\Delta} \right) \right) \right| \\ &\leq P(x) \left| E \left(\sum_{\substack{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)}) \\ \in (\Gamma_\beta \setminus \{\odot\})^s}} \left(\prod_{i=1}^s I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} - \prod_{i=1}^s \bar{I}_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \right) \right) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq P(x) \sum_{\substack{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)}) \\ \in (\Gamma_\beta \setminus \{\odot\})^s}} \left| E \left(\prod_{i=1}^s I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} - \prod_{i=1}^s \bar{I}_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \right) \right|$$

mit $P \in \mathcal{P}$.

Im Abschnitt 4.3 werden die numerischen Realisierungen $\bar{I}_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta}$ so eingerichtet, dass

$$\left| E \left(\prod_{i=1}^s I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} - \prod_{i=1}^s \bar{I}_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \right) \right| \leq K \Delta^{\beta+1} \quad (4.24)$$

und somit ergibt sich für den ersten Summanden in (4.23)

$$\left| E \left(\prod_{j=1}^s \left(\sum_{\alpha \in \Gamma_\beta \setminus \{\odot\}} F_\alpha^{i_j}(t, x) I_{\alpha, t, t+\Delta} \right) - \prod_{j=1}^s \left(\sum_{\alpha \in \Gamma_\beta \setminus \{\odot\}} F_\alpha^{i_j} \bar{I}_{\alpha, t, t+\Delta} \right) \right) \right| \leq P(x) \Delta^{\beta+1}$$

mit $P \in \mathcal{P}$.

Nun betrachten wir den Summanden $|M|$ im Ausdruck (4.23). Nachdem wir die Summen ausmultipliziert und die erhaltenen Produkte umsortiert haben, bekommen wir:

$$\begin{aligned} |M| \leq P(x) & \left| E \left(\sum_{\substack{s_1, s_2: s_2 > 0, \\ s_1 + s_2 = s}} \sum_{\substack{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s_1)}) \\ \in (\Gamma_\beta \setminus \{\odot\})^{s_1}}} \sum_{\substack{(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(s_2)}) \\ \in (\mathcal{R}(\Gamma_\beta))^{s_2}}} \right. \\ & \left. \prod_{i=1}^{s_1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot \prod_{j=1}^{s_2} I_{\sigma^{(j)}} \left[|F_{\sigma^{(j)}}(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2 \right]_{t, t+\Delta} \right) \right|. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Aus technischen Gründen schätzen wir den Erwartungswert in (4.25) wie folgt ab:

$$\begin{aligned} & \left| E \left(\sum_{\substack{s_1, s_2: s_2 > 0, \\ s_1 + s_2 = s}} \sum_{\substack{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s_1)}) \\ \in (\Gamma_\beta \setminus \{\odot\})^{s_1}}} \sum_{\substack{(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(s_2)}) \\ \in (\mathcal{R}(\Gamma_\beta))^{s_2}}} \right. \\ & \left. \prod_{i=1}^{s_1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot \prod_{j=1}^{s_2} I_{\sigma^{(j)}} \left[|F_{\sigma^{(j)}}(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2 \right]_{t, t+\Delta} \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| E \left(\sum_{\substack{s_1, s_2: s_2 \geq 2, \\ s_1 + s_2 = s}} \sum_{\substack{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s_1)}) \\ \in (\Gamma_\beta \setminus \{\odot\})^{s_1}}} \sum_{\substack{(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(s_2)}) \\ \in (\mathcal{R}(\Gamma_\beta))^{s_2}}} \right. \\
&\quad \left. \prod_{i=1}^{s_1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot \prod_{j=1}^{s_2} I_{\sigma^{(j)}} [|F_{\sigma^{(j)}}(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2]_{t, t+\Delta} \right) \Bigg| \\
&\quad + \left| E \left(\sum_{\substack{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s-1)}) \\ \in (\Gamma_\beta \setminus \{\odot\})^{s-1}}} \sum_{\sigma \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta)} \prod_{i=1}^{s-1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot I_\sigma [|F_\sigma(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2]_{t, t+\Delta} \right) \right|. \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Zuerst wenden wir uns dem ersten Summanden in (4.26) zu. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\left| E \left(\sum_{\substack{s_1, s_2: s_2 \geq 2, \\ s_1 + s_2 = s}} \sum_{\substack{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s_1)}) \\ \in (\Gamma_\beta \setminus \{\odot\})^{s_1}}} \sum_{\substack{(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(s_2)}) \\ \in (\mathcal{R}(\Gamma_\beta))^{s_2}}} \right. \\
&\quad \left. \prod_{i=1}^{s_1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot \prod_{j=1}^{s_2} I_{\sigma^{(j)}} [|F_{\sigma^{(j)}}(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2]_{t, t+\Delta} \right) \Bigg| \\
&\leq \sum_{\substack{s_1, s_2: s_2 \geq 2, \\ s_1 + s_2 = s}} \sum_{\substack{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s_1)}) \\ \in (\Gamma_\beta \setminus \{\odot\})^{s_1}}} \sum_{\substack{(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(s_2)}) \\ \in (\mathcal{R}(\Gamma_\beta))^{s_2}}} \\
&\quad E \left| \prod_{i=1}^{s_1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot \prod_{j=1}^{s_2} I_{\sigma^{(j)}} [|F_{\sigma^{(j)}}(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2]_{t, t+\Delta} \right|. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Nun zu den einzelnen Summanden in (4.27). Unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
&E \left| \prod_{i=1}^{s_1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot \prod_{j=1}^{s_2} I_{\sigma^{(j)}} [|F_{\sigma^{(j)}}(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2]_{t, t+\Delta} \right| \\
&\leq \left(E \left| \prod_{i=1}^{s_1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \right|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(E \left| \prod_{j=1}^{s_2} I_{\sigma^{(j)}} [|F_{\sigma^{(j)}}(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2]_{t, t+\Delta} \right|^2 \right)^{1/2} \leq
\end{aligned}$$

$$\leq K \left(E \left(\prod_{i=1}^{s_1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta}^2 \right) \right)^{1/2} \cdot \left(E \left(\prod_{j=1}^{s_2} I_{\sigma^{(j)}, t, t+\Delta}^2 \right) \right)^{1/2}, \quad (4.28)$$

denn wegen des linearen Wachstums von $F_{\sigma^{(j)}}$ ist

$$\begin{aligned} & E \left| \prod_{j=1}^{s_2} I_{\sigma^{(j)}} \left[|F_{\sigma^{(j)}}(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2 \right]_{t, t+\Delta} \right|^2 \\ & \leq K \cdot E \left(\prod_{j=1}^{s_2} \left(I_{\sigma^{(j)}} \left[1 + |X_{t,x}(\cdot)|_2 \right]_{t, t+\Delta} \right)^2 \right) \\ & \leq K \cdot E \left(\left| 1 + \sup_{t \leq \theta \leq T} |X_{t,x}(\theta)|_2^2 \right|^{s_2} \cdot \prod_{j=1}^{s_2} I_{\sigma^{(j)}, t, t+\Delta}^2 \right) \\ & \leq K \cdot E \left(1 + \sup_{t \leq \theta \leq T} |X_{t,x}(\theta)|_2^{2s_2} \right) \cdot E \left(\prod_{j=1}^{s_2} I_{\sigma^{(j)}, t, t+\Delta}^2 \right) \\ & \leq K \cdot E \left(\prod_{j=1}^{s_2} I_{\sigma^{(j)}, t, t+\Delta}^2 \right), \end{aligned}$$

wobei sich

$$E \left(1 + \sup_{t \leq \theta \leq T} |X_{t,x}(\theta)|_2^{2s_2} \right) < \infty \quad (4.29)$$

unter Ausnutzung des linearen Wachstums von f , g und h mit der Gronwall-Ungleichung ergibt (vgl. Bouleau und Lépingle [2], Kapitel 5, A.3).

Mit der Abschätzung (4.28) und Lemma 4.2.1 erhalten wir

$$\begin{aligned} & E \left| \prod_{i=1}^{s_1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot \prod_{j=1}^{s_2} I_{\sigma^{(j)}} \left[|F_{\sigma^{(j)}}(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2 \right]_{t, t+\Delta} \right| \\ & \leq K \left(\Delta \sum_{i=1}^{s_1} (l(\alpha^{(i)}) + n(\alpha^{(i)}) + o(\alpha^{(i)})) \right)^{1/2} \cdot \left(\Delta \sum_{j=1}^{s_2} (l(\sigma^{(j)}) + n(\sigma^{(j)}) + o(\sigma^{(j)})) \right)^{1/2} \\ & = K \Delta^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{s_1} (l(\alpha^{(i)}) + n(\alpha^{(i)}) + o(\alpha^{(i)})) + \sum_{j=1}^{s_2} (l(\sigma^{(j)}) + n(\sigma^{(j)}) + o(\sigma^{(j)})) \right). \end{aligned}$$

Wegen $s_1 \geq 0$ und $s_2 \geq 2$ ist

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{s_1} (l(\alpha^{(i)}) + n(\alpha^{(i)}) + o(\alpha^{(i)})) + \sum_{j=1}^{s_2} (l(\sigma^{(j)}) + n(\sigma^{(j)}) + o(\sigma^{(j)})) \right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (l(\sigma^{(j)}) + n(\sigma^{(j)}) + o(\sigma^{(j)})) \geq \min_{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta)} l(\alpha).$$

Also,

$$\left| E \left(\sum_{\substack{s_1, s_2: s_2 \geq 2, \\ s_1 + s_2 = s}} \sum_{\substack{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s_1)}) \\ \in (\Gamma_\beta \setminus \{\odot\})^{s_1}}} \sum_{\substack{(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(s_2)}) \\ \in (\mathcal{R}(\Gamma_\beta))^{s_2}}} \prod_{i=1}^{s_1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot \prod_{j=1}^{s_2} I_{\sigma^{(j)}} [|F_{\sigma^{(j)}}(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2]_{t, t+\Delta} \right) \right| \leq K \Delta^{\min_{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta)} l(\alpha)},$$

woraus sich sofort die folgende Forderung ergibt:

$$\begin{aligned} \Gamma_\beta \text{ muss so gew\u00e4hlt werden, dass} \\ \min_{\alpha \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta)} l(\alpha) \geq \beta + 1. \end{aligned}$$

(4.30)

Es ist offensichtlich, dass die hierarchische Menge

$$\mathcal{A} := \{\alpha \in \mathcal{M}_{k,m} : l(\alpha) \leq \beta\}$$

die Forderungen (4.22) und (4.30) erf\u00fcllt. Wir w\u00e4hlen jetzt $\Gamma_\beta = \mathcal{A}$ und zeigen, dass diese hierarchische Menge auch die s\u00e4mtlichen anderen Kriterien erf\u00fcllt.

Um dies zu verifizieren, betrachten wir als n\u00e4chstes den zweiten Summanden in (4.26). Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass

$$\left| E \left(\sum_{\substack{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s-1)}) \\ \in (\Gamma_\beta \setminus \{\odot\})^{s-1}}} \sum_{\sigma \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta)} \prod_{i=1}^{s-1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} I_\sigma [|F_\sigma(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2]_{t, t+\Delta} \right) \right| \leq K \Delta^{\beta+1}, \quad (4.31)$$

falls $\Gamma_\beta = \mathcal{A}$ gew\u00e4hlt wird.

Es gilt

$$\begin{aligned}
& \left| E \left(\sum_{\substack{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s-1)}) \\ \in (\Gamma_\beta \setminus \{\odot\})^{s-1}}} \sum_{\sigma \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta)} \prod_{i=1}^{s-1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot I_\sigma \left[|F_\sigma(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2 \right]_{t, t+\Delta} \right) \right| \\
& \leq \sum_{\substack{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s-1)}) \\ \in (\Gamma_\beta \setminus \{\odot\})^{s-1}}} \sum_{\sigma \in \mathcal{R}(\Gamma_\beta)} \left| E \left(\prod_{i=1}^{s-1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot I_\sigma \left[|F_\sigma(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2 \right]_{t, t+\Delta} \right) \right|. \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Für die einzelnen Summanden in (4.32) gilt:

$$\begin{aligned}
& \left| E \left(\prod_{i=1}^{s-1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot I_\sigma \left[|F_\sigma(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2 \right]_{t, t+\Delta} \right) \right| \\
& \leq \left| E \left(\left(1 + \sup_{t \leq \theta \leq T} |X_{t,x}(\theta)|_2 \right) \cdot \prod_{i=1}^{s-1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot I_{\sigma, t, t+\Delta} \right) \right| \\
& \leq \left| E \left(1 + \sup_{t \leq \theta \leq T} |X_{t,x}(\theta)|_2 \right) \right| \cdot \left| E \left(\prod_{i=1}^{s-1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot I_{\sigma, t, t+\Delta} \right) \right|.
\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
& \left| E \left(1 + \sup_{t \leq \theta \leq T} |X_{t,x}(\theta)|_2 \right) \right| \\
& \leq E \left| 1 + \sup_{t \leq \theta \leq T} |X_{t,x}(\theta)|_2 \right| \\
& \leq \left(E \left(1 + \sup_{t \leq \theta \leq T} |X_{t,x}(\theta)|_2 \right)^2 \right)^{1/2} \\
& \leq K \left(1 + E \left(\sup_{t \leq \theta \leq T} |X_{t,x}(\theta)|_2^2 \right) \right)^{1/2} \\
& \leq K,
\end{aligned}$$

wobei

$$E \left(\sup_{t \leq \theta \leq T} |X_{t,x}(\theta)|_2^2 \right) < \infty \quad (4.33)$$

auf analoge Weise wie (4.29) folgt.

Also,

$$\begin{aligned} & \left| E \left(\prod_{i=1}^{s-1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot I_{\sigma} \left[|F_{\sigma}(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2 \right]_{t, t+\Delta} \right) \right| \\ & \leq K \left| E \left(\prod_{i=1}^{s-1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot I_{\sigma, t, t+\Delta} \right) \right|. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Nun schätzen wir den Term $|E(\prod_{i=1}^{s-1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot I_{\sigma, t, t+\Delta})|$ ab. Wegen Lemma 4.2.2 gilt:

$$\begin{aligned} & \left| E \left(\prod_{i=1}^{s-1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot I_{\sigma, t, t+\Delta} \right) \right| \\ & = \left| E \left(I_{\sigma, t, t+\Delta} \cdot \sum_{j=1}^r I_{\gamma^{(j)}, t, t+\Delta} \right) \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^r |E(I_{\gamma^{(j)}, t, t+\Delta} \cdot I_{\sigma, t, t+\Delta})| \end{aligned} \quad (4.35)$$

für geeignete Multiindizes $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(r)} \in \mathcal{M}_{k,m}$ mit $r = r(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s-1)})$. Für jeden Summanden in (4.35) haben wir nach Lemma 4.2.4

$$|E(I_{\gamma^{(j)}, t, t+\Delta} \cdot I_{\sigma, t, t+\Delta})| \begin{cases} = 0, & \text{falls } (\gamma^{(j)})_+ \neq \sigma_+ \\ \leq K\Delta^{\kappa} & \text{falls } (\gamma^{(j)})_+ = \sigma_+ \end{cases}$$

mit

$$\kappa = \frac{1}{2} (l(\gamma^{(j)}) + n(\gamma^{(j)}) + o(\gamma^{(j)})) + \frac{1}{2} (l(\sigma) + n(\sigma) + o(\sigma)).$$

Es gilt also die Abschätzung:

$$\sum_{j=1}^r |E(I_{\gamma^{(j)}, t, t+\Delta} \cdot I_{\sigma, t, t+\Delta})| \leq K \cdot \sum_{\{j: (\gamma^{(j)})_+ = \sigma_+\}} \Delta^{\kappa}.$$

Wegen $\sigma \in \mathcal{R}(\Gamma_{\beta})$ haben wir $l(\sigma) = \beta + 1$. Unter Beachtung von $\sigma_+ = (\gamma^{(j)})_+$ folgt für den Exponenten κ :

$$\kappa = \frac{1}{2} (l(\gamma^{(j)}) + n(\gamma^{(j)}) + o(\gamma^{(j)})) + \frac{1}{2} (l(\sigma) + n(\sigma) + o(\sigma)) =$$

$$\begin{aligned}
&= n(\gamma^{(j)}) + o(\gamma^{(j)}) + \frac{1}{2}l(\gamma^{(j)+}) + n(\sigma) + o(\sigma) + \frac{1}{2}l(\sigma+) \\
&= n(\gamma^{(j)}) + o(\gamma^{(j)}) + n(\sigma) + o(\sigma) + l(\sigma+) \\
&= n(\gamma^{(j)}) + o(\gamma^{(j)}) + l(\sigma) \\
&\geq \beta + 1 \quad \text{für alle } j \text{ mit } \sigma+ = (\gamma^{(j)})+.
\end{aligned}$$

Wir haben also für jeden Summanden in (4.35)

$$\left| E \left(\prod_{i=1}^{s-1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} I_{\sigma, t, t+\Delta} \right) \right| \leq K \Delta^{\beta+1}$$

und somit für den Term (4.34)

$$\left| E \left(\prod_{i=1}^{s-1} I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \cdot I_{\sigma} [|F_{\sigma}(\cdot, X_{t,x}(\cdot))|_2]_{t, t+\Delta} \right) \right| \leq K \Delta^{\beta+1}.$$

Also, (4.31) gilt, falls $\Gamma_{\beta} = \{\alpha \in \mathcal{M}_{k,m} : l(\alpha) \leq \beta\}$ gewählt wird.

Jetzt bleibt noch zu zeigen, dass die Bedingung (4.7) des Theorems 4.1.1 bei dieser Wahl der hierarchischen Menge erfüllt ist. Dafür beweisen wir das folgende Lemma:

Lemma 4.2.5 *Seien $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{k,m}$ eine hierarchische Menge und \overline{X} ein auf \mathcal{A} basierendes Ito-Taylor-Verfahren für stochastische affine Kontrollsysteme (siehe Definition (4.10)), in welchem die mehrfachen Ito-Kontrollintegrale $\overline{I}_{\alpha, t, t+\Delta}$ numerisch durch*

$$\overline{I}_{\alpha, t, t+\Delta} = Z_{\alpha} \Delta^{\frac{1}{2}(l(\alpha) + n(\alpha) + o(\alpha))}, \quad \alpha \in \mathcal{A} \quad (4.36)$$

realisiert werden, wobei Z_{α} , $\alpha \in \mathcal{A}$, von Δ unabhängige Zufallsvariablen sind, deren sämtliche Momente existieren. Dann gilt für alle $(i_1, \dots, i_{2\beta+2}) \in \{1, \dots, d\}^{2\beta+2}$ die Abschätzung

$$E \left(\prod_{j=1}^{2\beta+2} \left| \overline{X}_{t,x}^{i_j}(t+\Delta) - x^{i_j} \right| \right) \leq P(x) \Delta^{\beta+1}, \quad (4.37)$$

wobei P eine Funktion der Klasse \mathcal{P} ist.

Beweis: Es gilt

$$E \left(\prod_{j=1}^{2\beta+2} \left| \bar{X}_{t,x}^{i_j}(t + \Delta) - x^{i_j} \right| \right) \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} &= E \left(\prod_{j=1}^{2\beta+2} \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{\odot\}} F_{\alpha}^{i_j}(t, x) \bar{I}_{\alpha, t, t+\Delta} \right| \right) \\ &\leq E \left(\prod_{j=1}^{2\beta+2} \sum_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{\odot\}} |F_{\alpha}^{i_j}(t, x)| \cdot |\bar{I}_{\alpha, t, t+\Delta}| \right) \\ &\leq P(x) E \left(\sum_{\substack{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(2\beta+2)}) \\ \in (\mathcal{A} \setminus \{\odot\})^{2\beta+2}}} \prod_{i=1}^{2\beta+2} |\bar{I}_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta}| \right) \\ &= P(x) \sum_{\substack{(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(2\beta+2)}) \\ \in (\mathcal{A} \setminus \{\odot\})^{2\beta+2}}} E \left| \prod_{i=1}^{2\beta+2} \bar{I}_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \right| \end{aligned} \quad (4.39)$$

mit $P \in \mathcal{P}$.

Für die einzelnen Summanden in (4.39) gilt nach Voraussetzung an Z_{α} und wegen $l(\alpha^{(i)}) + n(\alpha^{(i)}) + o(\alpha^{(i)}) \geq l(\alpha^{(i)}) \geq 1$ für alle i :

$$\begin{aligned} E \left| \prod_{i=1}^{2\beta+2} \bar{I}_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \right| &= E \left| \prod_{i=1}^{2\beta+2} Z_{\alpha^{(i)}} \Delta^{\frac{1}{2}(l(\alpha^{(i)}) + n(\alpha^{(i)}) + o(\alpha^{(i)}))} \right| \\ &= E \left| \prod_{i=1}^{2\beta+2} Z_{\alpha^{(i)}} \right| \cdot \Delta^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2\beta+2} (l(\alpha^{(i)}) + n(\alpha^{(i)}) + o(\alpha^{(i)}))} \\ &\leq K \Delta^{\beta+1}. \end{aligned}$$

Also,

$$E \left(\prod_{j=1}^{2\beta+2} \left| \bar{X}_{t,x}^{i_j}(t + \Delta) - x^{i_j} \right| \right) \leq P(x) \Delta^{\beta+1}, \quad (4.40)$$

wie behauptet. \square

Da das Lemma 4.2.5 für jede hierarchische Menge gilt, also auch für Γ_β , wird das Ito-Taylor-Verfahren (4.10) der schwachen Ordnung β von folgender Bauart sein:

$$\bar{X}_{t,x}(t + \Delta) = \sum_{\alpha \in \Gamma_\beta} F_\alpha(t, x) \cdot Z_\alpha \Delta^{\frac{1}{2}(l(\alpha) + n(\alpha) + o(\alpha))} \quad (4.41)$$

mit geeigneten Zufallsvariablen Z_α , deren Wahl wir uns im nächsten Abschnitt widmen.

4.3 Die Wahl der Zufallsvariablen Z_α

Um ein numerisches Schema der schwachen Ordnung β , das auf einer Diskretisierung

$$0 = t_0 \leq \dots \leq t_N = T \quad (4.42)$$

von $[0, T]$ mit Schrittweiten $\Delta_n = t_{n+1} - t_n$, $n = 0, \dots, N - 1$, basiert, implementieren zu können, ist es notwendig, die mehrfachen Ito-Kontrollintegrale $I_{\alpha,t,t+\Delta}$ für $t = t_n$ und $\Delta = \Delta_n$ für $n = 0, \dots, N - 1$ auszurechnen bzw. zu approximieren.

Gemäß Lemma 4.2.5 ist die Bedingung (4.7) des Theorems 4.1.1 erfüllt, wenn die numerischen Realisierungen $\bar{I}_{\alpha,t,t+\Delta}$ von der Form

$$\bar{I}_{\alpha,t,t+\Delta} = Z_\alpha \cdot \Delta^{\frac{1}{2}(l(\alpha) + n(\alpha) + o(\alpha))}, \quad \alpha \in \Gamma_\beta \quad (4.43)$$

sind, mit Zufallsvariablen Z_α , deren sämtliche Momente existieren.

Außerdem, um die Bedingung (4.6) zu gewährleisten, müssen die gemäß (4.43) gewählten Zufallsvariablen $\bar{I}_{\alpha,t,t+\Delta}$ noch folgende Momentenbedingung erfüllen:

Es existiert eine Konstante $K > 0$ derart, dass für alle $(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)}) \in (\Gamma_\beta \setminus \{\odot\})^s$ mit $s = 1, \dots, 2\beta + 1$

$$\left| E \left(\prod_{i=1}^s I_{\alpha^{(i)},t,t+\Delta} - \prod_{i=1}^s \bar{I}_{\alpha^{(i)},t,t+\Delta} \right) \right| \leq K \Delta^{\beta+1} \quad (4.44)$$

gilt.

In diesem Abschnitt widmen wir uns der Frage, wie die Zufallsvariablen Z_α in (4.43) zu wählen sind, damit für jede Kollektion von Multiindizes $(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)}) \in (\Gamma_\beta \setminus \{\odot\})^s$ mit $s = 1, \dots, 2\beta + 1$ die Abschätzung (4.44) gilt. Die Wahl der Z_α hängt entscheidend von β ab, wobei der Rechenaufwand mit wachsendem β steigt. Wir beschränken uns hier auf die Fälle $\beta = 1$ und $\beta = 2$.

Im Folgenden bedienen wir uns des öfteren der jeder Auswahl von Multiindizes $(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)}) \in (\Gamma_\beta \setminus \{\odot\})^s$ zugeordneten Zahl

$$\kappa = \kappa(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)}) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s (l(\alpha^{(i)}) + n(\alpha^{(i)}) + o(\alpha^{(i)})).$$

Wir bemerken vorab, dass es genügt, nach solchen Zufallsvariablen $Z_\alpha, \alpha \in \Gamma_\beta$, zu suchen, die die Gültigkeit der Momentenbedingung (4.44) für alle $(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)}) \in (\Gamma_\beta \setminus \{\odot\})^s$ mit $\kappa < \beta + 1$ gewährleisten. Für solche Z_α ist (4.44) für alle $(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)})$ mit $\kappa \geq \beta + 1$ automatisch erfüllt.

Ferner bemerken wir, dass für $s = 1$ die Bedingung (4.44) zu

$$|E(I_{\alpha, t, t+\Delta}) - \Delta^\kappa E(Z_\alpha)| \leq K \Delta^{\beta+1}$$

wird. Im Falle $l(\alpha) \neq n(\alpha) + o(\alpha)$ ist $E(I_{\alpha, t, t+\Delta}) = 0$, woraus

$$\Delta^\kappa |E(Z_\alpha)| \leq K \Delta^{\beta+1}$$

folgt. Die letzte Abschätzung ist aber äquivalent zur Bedingung

$$E(Z_\alpha) = 0 \quad \text{für } l(\alpha) \neq n(\alpha) + o(\alpha),$$

denn $\kappa < \beta + 1$ und Z_α ist unabhängig von Δ . Diese Überlegung wird im Folgenden öfter benutzt.

Wegen der zentralen Rolle der Normalverteilung benutzen wir in diesem Abschnitt das bekannte

Lemma 4.3.1 *Für die zentralen Momente einer $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariable X gilt*

$$\begin{aligned} E((X - \mu)^{2q+1}) &= 0 \\ E((X - \mu)^{2q}) &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2q - 1) \sigma^{2q}, \end{aligned}$$

wobei $q = 1, 2, 3, \dots$

Wie in der Einführung beschrieben, ist die Kontrollfunktion $u : [0, T] \rightarrow U_k \subset \mathbb{R}^k$ im Allgemeinen nur messbar und beschränkt. Eine Approximationsmethode für $I_{\alpha, t, t+\Delta}$ mit einer solchen Kontrollfunktion ist für den Fall $l(\alpha) = n(\alpha) + o(\alpha)$ in [6] beschrieben. Mit diesem Ansatz kann man auch die Zufallsvariablen für ein allgemeines u und $I_{\alpha, t, t+\Delta}$ mit $l(\alpha) \neq n(\alpha) + o(\alpha)$ herleiten. In dieser Arbeit beschränken wir uns wegen besserer Übersichtlichkeit und im Hinblick auf numerische Experimente auf Kontrollfunktionen u mit stückweise glatten Komponenten. Für diese Klasse von Kontrollfunktionen können wir die klassischen Approximationstechniken aus der elementaren Numerik, wie Rechteck-, Trapez- oder Simpson-Regel, benutzen.

Wir präzisieren nun die Voraussetzungen an u . Jede Komponente u^j von u mit $j = \underline{1}, \dots, \underline{k}$ sei auf $[0, T]$ stückweise stetig, d.h. u^j sei für alle $\tau \in [0, T]$ mit Ausnahme von endlich vielen Unstetigkeitsstellen erster Art stetig. Außerdem setzen wir, wenn $\tau_1^j, \dots, \tau_M^j$ die Unstetigkeitsstellen von u^j sind, für ein schwaches Schema der Ordnung β voraus, dass die gemäß

$$\left(u^j|_{[\tau_{i-1}^j, \tau_i^j]}\right)^*(\tau) = \begin{cases} u^j(\tau) & \text{für } \tau \in (\tau_{i-1}^j, \tau_i^j) \\ \lim_{s \rightarrow \tau+0} u^j(s) & \text{für } \tau = \tau_{i-1}^j \\ \lim_{s \rightarrow \tau-0} u^j(s) & \text{für } \tau = \tau_i^j \end{cases}$$

definierten Funktionen $\left(u^j|_{[\tau_1^j, \tau_2^j]}\right)^*, \dots, \left(u^j|_{[\tau_{M-1}^j, \tau_M^j]}\right)^*$, sowie $\left(u^j|_{[0, \tau_1^j]}\right)^*$, falls 0 Stetigkeitspunkt von u^j ist, und $\left(u^j|_{[\tau_M^j, T]}\right)^*$, falls T Stetigkeitspunkt von u^j ist, β -mal stetig differenzierbar sind.

Nach den obigen Voraussetzungen an die Komponenten von u können wir die Diskretisierung (4.42) so einrichten, dass wenn $[t, t + \Delta]$ ein Teilintervall mit $t = t_n$ und $t + \Delta = t_{n+1}$ für irgendein $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ist, die gemäß

$$(u^j)^*(s) = \begin{cases} u^j(s) & \text{für } s \in (t, t + \Delta) \\ (u^j)^+ & \text{für } s = t \\ (u^j)^- & \text{für } s = t + \Delta \end{cases}$$

mit

$$(u^j)^+ := \lim_{r \rightarrow t+0} u^j(r) \quad \text{und} \quad (u^j)^- := \lim_{r \rightarrow (t+\Delta)-0} u^j(r)$$

definierten Funktionen $(u^1)^*, \dots, (u^k)^*$ auf $[t, t + \Delta]$ β -mal stetig differenzierbar sind. Die folgenden Betrachtungen gelten deshalb für jedes Teilintervall $[t, t + \Delta]$ von $[0, T]$, dessen Randpunkte benachbarte Diskretisierungspunkte sind. Für eine kompaktere Schreibweise haben wir $u^0 \equiv 1$ verwendet.

4.3.1 Approximation der Ito-Kontrollintegrale für $\beta = 1$

Es ist

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{\alpha \in \mathcal{M}_{k,m} : l(\alpha) \leq 1\}, \quad \text{d.h.} \\ \Gamma_1 \setminus \{\odot\} &= \{(0), (\underline{1}), \dots, (\underline{k}), (\overline{1}), \dots, (\overline{m})\}.\end{aligned}$$

Nun sind $Z_\alpha, \alpha \in \Gamma_1 \setminus \{\odot\}$ so zu wählen, dass die folgende Bedingung erfüllt ist:

Für $s = 1, 2, 3$ gilt

$$\begin{aligned}& \left| E \left(\prod_{i=1}^s I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \right) - E \left(\prod_{i=1}^s \bar{I}_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \right) \right| \\ &= \left| E \left(\prod_{i=1}^s I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \right) - \Delta^\kappa E \left(\prod_{i=1}^s Z_{\alpha^{(i)}} \right) \right| \leq K \Delta^2 \\ &\text{für alle } (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)}) \in (\Gamma_1 \setminus \{\odot\})^s \text{ mit } \kappa < 2.\end{aligned}$$

(4.45)

1. Sei zunächst $\alpha = (0)$. Dann

$$\bar{I}_{(0), t, t+\Delta} = I_{(0), t, t+\Delta} = \Delta.$$

2. Sei $\alpha = (j)$ mit $j \in \{\underline{1}, \dots, \underline{k}\}$. In diesem Fall approximieren wir $I_{(j), t, t+\Delta}$ nach der Rechtecksregel. Wegen

$$I_{(j), t, t+\Delta} = \int_t^{t+\Delta} u^j(s) ds = \int_t^{t+\Delta} (u^j)^*(s) ds = (u^j)^+ \Delta + O(\Delta^2)$$

gilt dann

$$\bar{I}_{(j), t, t+\Delta} = (u^j)^+ \Delta.$$

Für $s = 1$ ist $\kappa = 1 < 2$ und es gilt:

$$\left| E(I_{(j), t, t+\Delta}) - E(\bar{I}_{(j), t, t+\Delta}) \right| = O(\Delta^2),$$

die Bedingung (4.45) ist also erfüllt.

3. Sei nun $\alpha = (j)$ mit $j \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}$.

Für jedes $j \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}$ gilt

$$I_{(j),t,t+\Delta} = \int_t^{t+\Delta} dW^j(s) = W^j(t+\Delta) - W^j(t),$$

wobei W^1, \dots, W^m unabhängige skalare Wiener-Prozesse sind. Daraus folgt sofort $I_{(j),t,t+\Delta} \sim N(0, \Delta)$. Gemäß (4.45) muss insbesondere für jedes $j \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}$ und $s = 1, 2, 3$ die Bedingung

$$|E(I_{(j),t,t+\Delta}^s) - \Delta^{s/2} E(Z_{(j)}^s)| \leq K\Delta^2$$

gelten. Mit Lemma 4.3.1 erhalten wir im Einzelnen die Bedingungen:

$$\begin{aligned} \Delta^{1/2} |E(Z_{(j)})| &\leq K\Delta^2 \\ \Delta |E(Z_{(j)}^2) - 1| &\leq K\Delta^2 \\ \Delta^{3/2} |E(Z_{(j)}^3)| &\leq K\Delta^2. \end{aligned}$$

Da $Z_{(j)}$ unabhängig von Δ ist, folgt sofort

$$|E(Z_{(j)})| + |E(Z_{(j)}^2) - 1| + |E(Z_{(j)}^3)| = 0.$$

Es ergeben sich die folgenden Möglichkeiten für $Z_{(j)}$:

- (i) $Z_{(j)} \sim N(0, 1)$
- (ii) $Z_{(j)}$ ist zweipunktverteilt mit $P(Z_{(j)} = \pm 1) = \frac{1}{2}$.

Also, für $j \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}$ ist

$$\bar{I}_{(j),t,t+\Delta} = Z_{(j)}\Delta^{1/2}$$

mit $Z_{(j)}$ wie oben.

4.3.2 Approximation der Ito-Kontrollintegrale für $\beta = 2$

Es ist

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \{\alpha \in \mathcal{M}_{k,m} : l(\alpha) \leq 2\}, \quad \text{d.h.} \\ \Gamma_2 \setminus \{\odot\} &= \Gamma_1 \setminus \{\odot\} \cup \{(j_1, j_2) \in \{0, \underline{1}, \dots, \underline{k}, \bar{1}, \dots, \bar{m}\}^2\}. \end{aligned}$$

Die Zufallsvariablen $Z_\alpha, \alpha \in \Gamma_2 \setminus \{\odot\}$ sind so zu wählen, dass die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
 & \text{Für } s = 1, \dots, 5 \text{ gilt} \\
 & \left| E \left(\prod_{i=1}^s I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \right) - E \left(\prod_{i=1}^s \bar{I}_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \right) \right| \\
 &= \left| E \left(\prod_{i=1}^s I_{\alpha^{(i)}, t, t+\Delta} \right) - \Delta^\kappa E \left(\prod_{i=1}^s Z_{\alpha^{(i)}} \right) \right| \leq K \Delta^3 \\
 & \text{für alle } (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)}) \in (\Gamma_1 \setminus \{\odot\})^s \text{ mit } \kappa < 3.
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

1. Sei $\alpha = (j)$ mit $j \in \{0, \underline{1}, \dots, \underline{k}\}$. Die mehrfachen Integrale $I_{(j), t, t+\Delta}$ werden nach der Trapezregel approximiert:

$$\bar{I}_{(j), t, t+\Delta} = \frac{(u^j)^+ + (u^j)^-}{2} \Delta,$$

denn

$$I_{(j), t, t+\Delta} = \int_t^{t+\Delta} (u^j)^*(s) ds = \frac{(u^j)^+ + (u^j)^-}{2} \Delta + O(\Delta^3).$$

Die so gewählten Größen $\bar{I}_{(j), t, t+\Delta}$ erfüllen (4.46), denn:

Für $s = 1$ ist $\kappa = 1 < 3$ und

$$|E(I_{(j), t, t+\Delta} - \bar{I}_{(j), t, t+\Delta})| \leq K \Delta^3.$$

Für $s = 2$ ist $\kappa = 2 < 3$ und

$$\begin{aligned}
 & |E(I_{(j_1), t, t+\Delta} \cdot I_{(j_2), t, t+\Delta} - \bar{I}_{(j_1), t, t+\Delta} \cdot \bar{I}_{(j_2), t, t+\Delta})| \\
 & \leq \frac{|(u^{j_1})^+ + (u^{j_1})^- + (u^{j_2})^+ + (u^{j_2})^-|}{2} \cdot \Delta \cdot K \Delta^3 + K \Delta^6 \leq K \Delta^3.
 \end{aligned}$$

Mehr ist nicht zu prüfen.

2. Sei $\alpha = (j)$ mit $j \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}$. Gemäß (4.46) muss insbesondere für jedes $j \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}$ und $s = 1, \dots, 5$ die Abschätzung

$$\left| E \left(I_{(j),t,t+\Delta}^s \right) - \Delta^{s/2} E \left(Z_{(j)}^s \right) \right| \leq K \Delta^3$$

gelten, woraus sich mit Lemma 4.3.1 ergibt, dass die folgende Bedingung erfüllt werden muss:

$$\left| E \left(Z_{(j)} \right) \right| + \left| E \left(Z_{(j)}^2 \right) - 1 \right| + \left| E \left(Z_{(j)}^3 \right) \right| + \left| E \left(Z_{(j)}^4 \right) - 3 \right| + \left| E \left(Z_{(j)}^5 \right) \right| = 0.$$

$Z_{(j)}$ kann also folgendermaßen gewählt werden:

(i)

$$Z_{(j)} \sim N(0, 1) \tag{4.47}$$

(ii) $Z_{(j)}$ ist dreipunktverteilt mit

$$\begin{cases} P \left(Z_{(j)} = \pm \sqrt{3} \right) &= \frac{1}{6} \\ P \left(Z_{(j)} = 0 \right) &= \frac{2}{3}. \end{cases} \tag{4.48}$$

3. Sei $\alpha = (j_1, j_2)$ mit $j_1, j_2 \in \{0, \underline{1}, \dots, \underline{k}\}$. Mit der Trapezregel folgt:

$$\begin{aligned} I_{(j_1, j_2), t, t+\Delta} &= \int_t^{t+\Delta} I_{(j_1), t, s} u^{j_2}(s) ds = \int_t^{t+\Delta} I_{(j_1), t, s} (u^{j_2})^*(s) ds \\ &= \int_t^{t+\Delta} \left[\frac{(u^{j_1})^*(s) + (u^{j_1})^*(t)}{2} (s - t) + O((s - t)^3) \right] \cdot (u^{j_2})^*(s) ds \\ &= \left[\frac{(u^{j_1})^+ + (u^{j_1})^-}{2} \Delta + O(\Delta)^3 \right] \cdot (u^{j_2})^- \cdot \frac{1}{2} \Delta + O(\Delta)^3 \\ &= \frac{((u^{j_1})^+ + (u^{j_1})^-) (u^{j_2})^-}{4} \Delta^2 + O(\Delta)^3. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Also,

$$\bar{I}_{(j_1, j_2), t, t+\Delta} = \frac{((u^{j_1})^+ + (u^{j_1})^-) (u^{j_2})^-}{4} \Delta^2.$$

4. Sei $\alpha = (j, i)$ mit $i \in \{0, \underline{1}, \dots, \underline{k}\}$ und $j \in \{\overline{1}, \dots, \overline{m}\}$.

Für $((j_1), (j_2, i))$ mit $j_1, j_2 \in \{\overline{1}, \dots, \overline{m}\}$ ist $\kappa = 2 \leq 3$. Deshalb beinhaltet (4.46) die Bedingung

$$\left| E \left(I_{(j_1), t, t+\Delta} \cdot I_{(j_2, i), t, t+\Delta} \right) - \Delta^2 E \left(Z_{(j_1)} \cdot Z_{(j_2, i)} \right) \right| \leq K \Delta^3,$$

die nach dem Ausrechnen von $I_{(j_1), t, t+\Delta} \cdot I_{(j_2, i), t, t+\Delta}$ mit Lemma 4.2.1 auf die Bedingung

$$\left| \delta_{j_1, j_2} \cdot I_{(0, i), t, t+\Delta} - \Delta^2 E \left(Z_{(j_1)} \cdot Z_{(j_2, i)} \right) \right| \leq K \Delta^3$$

führt, wobei δ_{j_1, j_2} das Kronecker-Symbol bezeichnet.

Ersetzen wir nun $I_{(0, i), t, t+\Delta}$ gemäß (4.49), so ergibt sich die Bedingung

$$\left| \delta_{j_1, j_2} \frac{(u^i)^-}{2} \cdot \Delta^2 + \delta_{j_1, j_2} O(\Delta^3) - \Delta^2 E \left(Z_{(j_1)} Z_{(j_2, i)} \right) \right| \leq K \Delta^3,$$

die erfüllt ist, wenn

$$\left| \delta_{j_1, j_2} \frac{(u^i)^-}{2} - E \left(Z_{(j_1)} Z_{(j_2, i)} \right) \right| = 0,$$

d.h. $E \left(Z_{(j_1)} Z_{(j_2, i)} \right) = \frac{(u^i)^-}{2} \cdot \delta_{j_1, j_2}$, gewährleistet wird.

Wähle $Z_{(j, i)} = \frac{(u^i)^-}{2} \cdot Z_{(j)}$, d.h.

$$\overline{I}_{(j, i), t, t+\Delta} = \frac{(u^i)^-}{2} \cdot Z_{(j)} \Delta^{3/2}.$$

Wegen der Relation

$$I_{(i, j), t, t+\Delta} = I_{(i), t, t+\Delta} I_{(j), t, t+\Delta} - I_{(j, i), t, t+\Delta},$$

die sich aus Lemma 4.2.1 ergibt, fordern wir

$$\overline{I}_{(i, j), t, t+\Delta} = \overline{I}_{(i), t, t+\Delta} \overline{I}_{(j), t, t+\Delta} - \overline{I}_{(j, i), t, t+\Delta},$$

also

$$Z_{(i, j)} = Z_{(i)} Z_{(j)} - Z_{(j, i)}.$$

Es folgt

$$Z_{(i, j)} = \left(\frac{(u^i)^+ + (u^i)^-}{2} - \frac{(u^i)^-}{2} \right) \cdot Z_{(j)} = \frac{(u^i)^+}{2} \cdot Z_{(j)},$$

und somit

$$\bar{I}_{(i,j),t,t+\Delta} = \frac{(u^i)^+}{2} Z_{(j)} \Delta^{3/2}.$$

Alle weiteren in (4.46) enthaltenen Bedingungen, in denen nur die Multiindizes $(i_1), (j_1), (j_2, i_2)$ und (i_3, j_3) mit $i_1, i_2, i_3 \in \{0, \underline{1}, \dots, \underline{k}\}$ und $j_1, j_2, j_3 \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}$ vorkommen, sind mit den obigen Spezifizierungen für Z_α automatisch erfüllt.

5. Sei nun $\alpha = (j_1, j_2)$ mit $j_1, j_2 \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}$. Die Abschätzung (4.46) beinhaltet die Ungleichung

$$\left| E \left(I_{(j_1, j_2), t, t+\Delta} I_{(j_3, j_4), t, t+\Delta} \right) - \Delta^2 E \left(Z_{(j_1, j_2)} Z_{(j_3, j_4)} \right) \right| \leq K \Delta^3,$$

welche nach dem Ausrechnen von $I_{(j_1, j_2), t, t+\Delta} I_{(j_3, j_4), t, t+\Delta}$ auf die Bedingung

$$E \left(Z_{(j_1, j_2)} Z_{(j_3, j_4)} \right) = \frac{1}{2} \delta_{j_1, j_2} \delta_{j_3, j_4} \quad (4.50)$$

führt. Das folgende Lemma zeigt, wie die Zufallsvariablen $Z_{(j_1, j_2)}$ und $Z_{(j_3, j_4)}$ beschaffen sein müssen, damit (4.50) erfüllt ist.

Lemma 4.3.2 *Seien η_{j_1, j_2} für $j_1, j_2 \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}$ die folgendermaßen definierten Zufallsvariablen:*

$$\begin{aligned} \eta_{j_1, j_2} \text{ ist unabhängig zweipunktverteilt mit } P(\eta_{j_1, j_2} = \pm 1) &= \frac{1}{2} \\ \text{für } j_1 = \bar{1}, \dots, \bar{m}, j_2 = \bar{1}, \dots, j_1 - 1, \\ \eta_{j_1, j_1} &= -1, \\ \eta_{j_1, j_2} &= -\eta_{j_2, j_1} \quad \text{für } j_1 = \bar{1}, \dots, \bar{m}, j_2 = j_1 + 1, \dots, \bar{m}. \end{aligned}$$

Dann erfüllen die Zufallsvariablen

$$Z_{(j_1, j_2)} = \frac{1}{2} (Z_{(j_1)} Z_{(j_2)} + \eta_{j_1, j_2})$$

die Bedingung (4.50), wobei $Z_{(j_1)}, Z_{(j_2)}$ gemäß (4.47) oder (4.48) gewählt werden.

Beweis: Es ist

$$E \left(Z_{(j_1, j_2)} Z_{(j_3, j_4)} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} E \left[Z_{(j_1)} Z_{(j_2)} Z_{(j_3)} Z_{(j_4)} + Z_{(j_1)} Z_{(j_2)} \eta_{j_3, j_4} + Z_{(j_3)} Z_{(j_4)} \eta_{j_1, j_2} + \eta_{j_1, j_2} \eta_{j_3, j_4} \right] \\
&= \frac{1}{4} [\delta_{j_1, j_2} \delta_{j_3, j_4} + \delta_{j_1, j_3} \delta_{j_2, j_4} + \delta_{j_1, j_4} \delta_{j_2, j_3} - \delta_{j_1, j_2} \delta_{j_3, j_4} \\
&\quad - \delta_{j_3, j_4} \delta_{j_1, j_2} + \delta_{j_1, j_2} \delta_{j_3, j_4} + \delta_{j_1, j_3} \delta_{j_2, j_4} - \delta_{j_1, j_4} \delta_{j_2, j_3}] \\
&= \frac{1}{2} \delta_{j_1, j_3} \delta_{j_2, j_4}.
\end{aligned}$$

□

Somit lauten die Zufallsvariablen $\bar{I}_{(j_1, j_2), t, t+\Delta}$ für $(j_1, j_2) \in \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}^2$:

$$\bar{I}_{(j_1, j_2), t, t+\Delta} = \frac{1}{2} (Z_{(j_1)} Z_{(j_2)} + \eta_{j_1, j_2}) \Delta$$

mit η_{j_1, j_2} wie in Lemma 4.3.2 definiert.

4.4 Ito-Taylor-Verfahren der schwachen Ordnung β für stochastische affine Kontrollsysteme

Theorem 4.4.1 *Sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ eine Diskretisierung von $[0, T]$ mit Schrittweiten $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ für $i = 0, \dots, N-1$ und maximaler Schrittweite*

$$\Delta_{\max} = \max_{0 \leq i \leq N-1} (t_{i+1} - t_i) \leq 1.$$

Sei Verfahren \bar{X} definiert gemäß

$$\bar{X}_{0, X_0}(t_{i+1}) = \bar{X}_{0, X_0}(t_i) + \sum_{\alpha \in \Gamma_\beta \setminus \odot} [F_\alpha(t_i, \bar{X}_i)] Z_\alpha \Delta_i^{\frac{1}{2}(l(\alpha) + n(\alpha) + o(\alpha))} \quad (4.51)$$

oder komponentenweise

$$\bar{X}_{0, X_0}^\mu(t_{i+1}) = \bar{X}_{0, X_0}^\mu(t_i) + \sum_{\alpha \in \Gamma_\beta \setminus \odot} [F_\alpha^\mu(t_i, \bar{X}_i)] Z_\alpha \Delta_i^{\frac{1}{2}(l(\alpha) + n(\alpha) + o(\alpha))} \quad (4.52)$$

mit der hierarchischen Menge

$$\Gamma_\beta := \{\alpha \in \mathcal{M}_{k, m} : l(\alpha) \leq \beta\}, \quad (4.53)$$

Koeffizientenfunktionen F_α^μ entsprechend $F(t, x) = x^\mu$ für $\mu = 1, \dots, d$ und geeigneten Zufallsvariablen Z_α , deren konkrete Wahl in Abschnitt 4.3 diskutiert wurde.

Dann gilt

$$|Eg(X_{0,X_0}(t_i)) - Eg(\bar{X}_{0,X_0}(t_i))| \leq K_g \Delta_{\max}^\beta$$

für $i = 0, \dots, N$ und jede Funktion $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, die $2\beta + 2$ -mal stetig differenzierbar ist und zusammen mit ihren partiellen Ableitungen nach x bis zu und einschließlich der Ordnung $2\beta + 2$ zur Klasse \mathcal{P} gehört, d.h. \bar{X} hat die schwache Ordnung β . Wir nennen \bar{X} schwaches Ito-Taylor-Verfahren der Ordnung β .

Im Folgenden geben wir einige konkrete schwache Verfahren an. Als Folge der Überlegungen in Abschnitt 4.3 benötigen wir dazu auf jedem Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ den rechtsseitigen Grenzwert $(u^j(t_i))^+$ im linken Randpunkt t_i und den linksseitigen Grenzwert $(u^j(t_{i+1}))^-$ im rechten Randpunkt t_{i+1} .

4.4.1 Das Euler-Schema

Das einfachste nichttriviale Schema hat die schwache Ordnung 1 und ist komponentenweise gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{X}_{0,X_0}^\mu(t_{i+1}) &= \bar{X}_{0,X_0}^\mu(t_i) + f_\mu(t_i, \bar{X}_i) \Delta_i + \sum_{j=1}^k g_{\mu,j}(t_i, \bar{X}_i) Z_{(\underline{j})}^i \Delta_i \\ &\quad + \sum_{r=1}^m h_{\mu,r}(t_i, \bar{X}_i) Z_{(\bar{r})} \Delta_i^{1/2} \end{aligned} \quad (4.54)$$

für $\mu = 1, \dots, d$ mit $Z_{(\underline{j})}^i = (u^j(t_i))^+$ und $Z_{(\bar{r})}$ wie in Abschnitt 4.3.1 definiert.

4.4.2 Das Ito-Taylor-Schema der schwachen Ordnung 2

Die μ -te Komponente des Ito-Taylor-Schemas der schwachen Ordnung 2 ist gegeben durch

$$\bar{X}_{0,X_0}^\mu(t_{i+1}) = \bar{X}_{0,X_0}^\mu(t_i) + f_\mu(t_i, \bar{X}_i) \Delta_i + \sum_{j=1}^k g_{\mu,j}(t_i, \bar{X}_i) Z_{(\underline{j})}^i \Delta_i +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{r=1}^m h_{\mu,r}(t_i, \bar{X}_i) Z_{(\bar{r})} \Delta_i^{1/2} + \frac{1}{2} L^0 f_{\mu}(t_i, \bar{X}_i) \Delta_i^2 \\
& + \sum_{j=1}^k L^j f_{\mu}(t_i, \bar{X}_i) Z_{(\underline{j},0)}^i \Delta_i^2 + \sum_{j=1}^k L^0 g_{\mu,j}(t_i, \bar{X}_i) Z_{(0,\underline{j})}^i \Delta_i^2 \\
& + \sum_{j_1, j_2=1}^k L^{j_1} g_{\mu, j_2}(t_i, \bar{X}_i) Z_{(\underline{j}_1, \underline{j}_2)}^i \Delta_i^2 + \sum_{r=1}^m L^{\bar{r}} f_{\mu}(t_i, \bar{X}_i) Z_{(\bar{r},0)} \Delta_i^{3/2} \\
& + \sum_{r=1}^m L^0 h_{\mu,r}(t_i, \bar{X}_i) Z_{(0,\bar{r})} \Delta_i^{3/2} + \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^m L^j h_{\mu,r}(t_i, \bar{X}_i) Z_{(\underline{j}, \bar{r})}^i \Delta_i^{3/2} \\
& + \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^m L^{\bar{r}} g_{\mu,j}(t_i, \bar{X}_i) Z_{(\bar{r}, \underline{j})}^i \Delta_i^{3/2} + \sum_{r_1, r_2=1}^m L^{\bar{r}_1} h_{\mu, r_2}(t_i, \bar{X}_i) Z_{(\bar{r}_1, \bar{r}_2)} \Delta_i
\end{aligned} \tag{4.55}$$

für $\mu = 1, \dots, d$ mit

$$\begin{aligned}
Z_{(\underline{j})}^i &= \frac{(u^j(t_i))^+ + (u^j(t_{i+1}))^-}{2}, \\
Z_{(\underline{j},0)}^i &= \frac{(u^j(t_i))^+ + (u^j(t_{i+1}))^-}{4}, \\
Z_{(0,\underline{j})}^i &= \frac{(u^j(t_{i+1}))^-}{2}, \\
Z_{(\underline{j}_1, \underline{j}_2)}^i &= \frac{\left((u^{j_1}(t_i))^+ + (u^{j_1}(t_{i+1}))^- \right) \cdot (u^{j_2}(t_{i+1}))^-}{4}, \\
Z_{(\underline{j}, \bar{r})}^i &= \frac{(u^j(t_i))^+}{2} Z_{(\bar{r})}, \\
Z_{(\bar{r}, \underline{j})}^i &= \frac{(u^j(t_{i+1}))^-}{2} Z_{(\bar{r})}, \\
Z_{(\bar{r},0)} &= Z_{(0,\bar{r})} = \frac{1}{2} Z_{(\bar{r})}
\end{aligned}$$

und $Z_{(\bar{r})}, Z_{(\bar{r}_1, \bar{r}_2)}$ wie in Abschnitt 4.3.2.

4.4.3 Das Ito-Taylor-Schema der schwachen Ordnung 3

Das Ito-Taylor-Schema der schwachen Ordnung 3 ist komponentenweise gegeben durch

$$\begin{aligned}
\overline{X}_{0,X_0}^\mu(t_{i+1}) &= \overline{X}_{0,X_0}^\mu(t_i) + f_\mu(t_i, \overline{X}_i) \Delta_i + \sum_{j=1}^k g_{\mu,j}(t_i, \overline{X}_i) \overline{I}_{(\underline{j}),t_i,t_{i+1}} \\
&+ \sum_{r=1}^m h_{\mu,r}(t_i, \overline{X}_i) \overline{I}_{(\overline{r}),t_i,t_{i+1}} + \frac{1}{2} L^0 f_\mu(t_i, \overline{X}_i) \Delta_i^2 \\
&+ \sum_{\substack{j_1, j_2=0, \\ j_1+j_2 \neq 0}}^k L^{\underline{j}_1} g_{\mu,j_2}(t_i, \overline{X}_i) \overline{I}_{(\underline{j}_1, \underline{j}_2),t_i,t_{i+1}} + \sum_{\substack{r_1, r_2=0, \\ r_1+r_2 \neq 0}}^m L^{\overline{r}_1} h_{\mu,r_2}(t_i, \overline{X}_i) \overline{I}_{(\overline{r}_1, \overline{r}_2),t_i,t_{i+1}} \\
&+ \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^m L^{\underline{j}} h_{\mu,r}(t_i, \overline{X}_i) \overline{I}_{(\underline{j}, \overline{r}),t_i,t_{i+1}} + \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^m L^{\overline{r}} g_{\mu,j}(t_i, \overline{X}_i) \overline{I}_{(\overline{r}, \underline{j}),t_i,t_{i+1}} \\
&+ \frac{1}{6} L^0 L^0 f_\mu(t_i, \overline{X}_i) \Delta_i^3 + \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3=0, \\ j_1+j_2+j_3 \neq 0}}^k L^{\underline{j}_1} L^{\underline{j}_2} g_{\mu,j_3}(t_i, \overline{X}_i) \overline{I}_{(\underline{j}_1, \underline{j}_2, \underline{j}_3),t_i,t_{i+1}} \\
&+ \sum_{j_1, j_2=0}^k \sum_{r=1}^m L^{\underline{j}_1} L^{\underline{j}_2} h_{\mu,r}(t_i, \overline{X}_i) \overline{I}_{(\underline{j}_1, \underline{j}_2, \overline{r}),t_i,t_{i+1}} + \sum_{j_1, j_2=0}^k \sum_{r=1}^m L^{\underline{j}_1} L^{\overline{r}} g_{\mu,j_2}(t_i, \overline{X}_i) \overline{I}_{(\underline{j}_1, \overline{r}, \underline{j}_2),t_i,t_{i+1}} \\
&+ \sum_{j=0}^k \sum_{r_1, r_2=1}^m L^{\underline{j}} L^{\overline{r}_1} h_{\mu,r_2}(t_i, \overline{X}_i) \overline{I}_{(\underline{j}, \overline{r}_1, \overline{r}_2),t_i,t_{i+1}} + \sum_{j_1, j_2=0}^k \sum_{r=1}^m L^{\overline{r}} L^{\underline{j}_1} g_{\mu,j_2}(t_i, \overline{X}_i) \overline{I}_{(\overline{r}, \underline{j}_1, \underline{j}_2),t_i,t_{i+1}} \\
&+ \sum_{j=0}^k \sum_{r_1, r_2=1}^m L^{\overline{r}_1} L^{\underline{j}} h_{\mu,r_2}(t_i, \overline{X}_i) \overline{I}_{(\overline{r}_1, \underline{j}, \overline{r}_2),t_i,t_{i+1}} + \sum_{j=0}^k \sum_{r_1, r_2=1}^m L^{\overline{r}_1} L^{\overline{r}_2} g_{\mu,j}(t_i, \overline{X}_i) \overline{I}_{(\overline{r}_1, \overline{r}_2, \underline{j}),t_i,t_{i+1}} \\
&+ \sum_{r_1, r_2, r_3=1}^m L^{\overline{r}_1} L^{\overline{r}_2} h_{\mu,r_3}(t_i, \overline{X}_i) \overline{I}_{(\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{r}_3),t_i,t_{i+1}},
\end{aligned}$$

wobei $g_{\mu,0} = h_{\mu,0} := f_\mu$, $\mu = 1, \dots, d$ und $\underline{0} = \overline{0} = 0$.

4.4.4 Ableitungsfreie schwache Schemata

Wie aus den Abschnitten 4.4.2 und 4.4.3 hervorgeht, erfordern schwache Ito-Taylor-Schemata der Ordnung $\beta \geq 2$ die Berechnung und Auswertung verschiedener Ableitun-

gen der Funktionen f , g und h . Ähnlich wie bei den starken Schemata kann man hier auch Runge-Kutta-ähnliche Verfahren herleiten, die ohne Ableitungen auskommen.

Um die Vorgehensweise zu veranschaulichen, betrachten wir hier den autonomen skalaren Fall mit eindimensionaler Kontrolle und eindimensionalem Rauschen, d.h. $d = k = m = 1$. Das Ito-Taylor-Schema der schwachen Ordnung $\beta = 2$ ist in diesem Fall gegeben durch

$$\begin{aligned}\bar{X}_{i+1} = & \bar{X}_i + f(\bar{X}_i)\Delta + g(\bar{X}_i) \cdot \frac{u^+ + u^-}{2}\Delta + h(\bar{X}_i) \cdot Z\sqrt{\Delta} \\ & + \frac{1}{2}L^0f(\bar{X}_i)\Delta^2 + L^1f(\bar{X}_i) \cdot \frac{u^+ + u^-}{4}\Delta^2 + L^0g(\bar{X}_i) \cdot \frac{u^-}{2}\Delta^2 \\ & + L^1g(\bar{X}_i) \cdot \frac{(u^+ + u^-) \cdot u^-}{4}\Delta^2 + L^1f(\bar{X}_i) \cdot \frac{1}{2}Z\Delta^{3/2} + L^0h(\bar{X}_i) \cdot \frac{1}{2}Z\Delta^{3/2} \\ & + L^1h(\bar{X}_i) \cdot \frac{u^+}{2}Z\Delta^{3/2} + L^1g(\bar{X}_i) \cdot \frac{u^-}{2}Z\Delta^{3/2} + L^1h(\bar{X}_i) \cdot \frac{1}{2}(Z^2 - 1)\Delta\end{aligned}\quad (4.56)$$

mit normalverteilten oder gemäß (4.48) dreipunktverteilten Zufallsvariablen Z und $\Delta = \Delta_i$, $u^+ = (u(t_i))^+$, $u^- = (u(t_{i+1}))^-$.

Alle folgenden Herleitungen basieren auf gewöhnlichen deterministischen Taylor-Entwicklungen der Ordnung 1 bzw. 2.

Als erstes betrachten wir die Taylor-Entwicklung der Ordnung 2 für die Funktion f im Punkt

$$\tilde{Y} := \bar{X}_i + f(\bar{X}_i)\Delta + g(\bar{X}_i)\frac{u^+ + u^-}{2}\Delta + h(\bar{X}_i)Z\sqrt{\Delta}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}f(\tilde{Y}) = & f(\bar{X}_i) + \frac{\partial f}{\partial x} \left(f(\bar{X}_i)\Delta + g(\bar{X}_i)\frac{u^+ + u^-}{2}\Delta + h(\bar{X}_i)Z\sqrt{\Delta} \right) \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(f(\bar{X}_i)\Delta + g(\bar{X}_i)\frac{u^+ + u^-}{2}\Delta + h(\bar{X}_i)Z\sqrt{\Delta} \right)^2 + O(\Delta).\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}f\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{X}_i) \cdot \Delta + h\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{X}_i) \cdot Z\sqrt{\Delta} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot Z^2\Delta + g\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{X}_i) \cdot \frac{u^+ + u^-}{2}\Delta \\ = f(\tilde{Y}) - f(\bar{X}_i) + O(\Delta)\end{aligned}$$

und somit

$$\frac{1}{2} \left(f \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{X}_i) + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{X}_i) \right) \Delta^2 + h \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{X}_i) \cdot \frac{Z}{2} \Delta^{3/2} + \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} & + g \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{X}_i) \cdot \frac{u^+ + u^-}{4} \Delta^2 \\ & = \frac{1}{2} L^0 f(\bar{X}_i) \cdot \Delta^2 + L^1 f(\bar{X}_i) \cdot \frac{u^+ + u^-}{4} \Delta^2 + L^1 f(\bar{X}_i) \frac{1}{2} Z \Delta^{3/2} \\ & = \frac{1}{2} \left(f(\tilde{\Upsilon}) - f(\bar{X}_i) \right) \cdot \Delta + O(\Delta^2). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Wir betrachten nun die Taylor-Entwicklung der Ordnung 2 für g im Punkt $\tilde{\Upsilon}$:

$$\begin{aligned} g(\tilde{\Upsilon}) &= g(\bar{X}_i) + \frac{\partial g}{\partial x} \left(f(\bar{X}_i) \Delta + g(\bar{X}_i) \frac{u^+ + u^-}{2} \Delta + h(\bar{X}_i) Z \sqrt{\Delta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \left(f(\bar{X}_i) \Delta + g(\bar{X}_i) \frac{u^+ + u^-}{2} \Delta + h(\bar{X}_i) Z \sqrt{\Delta} \right)^2 + O(\Delta). \end{aligned}$$

Daraus folgt analog zu (4.58):

$$\frac{u^-}{2} \left(f \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{X}_i) + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\bar{X}_i) \right) \Delta^2 \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} & + g \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{X}_i) \cdot \frac{(u^+ + u^-) u^-}{4} \Delta^2 + h \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{X}_i) \cdot \frac{u^-}{2} Z \Delta^{3/2} \\ & = L^0 g(\bar{X}_i) \cdot \frac{u^-}{2} \Delta^2 + L^1 g(\bar{X}_i) \cdot \frac{(u^+ + u^-) u^-}{4} \Delta^2 + L^1 g(\bar{X}_i) \frac{u^-}{2} Z \Delta^{3/2} \\ & = \frac{u^-}{2} \left(g(\tilde{\Upsilon}) - g(\bar{X}_i) \right) \cdot \Delta + O(\Delta^2). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Die Taylor-Entwicklung der Ordnung 1 für h in den Punkten

$$\begin{aligned} \Upsilon^+ &:= \bar{X}_i + f(\bar{X}_i) \Delta + g(\bar{X}_i) \frac{u^+ + u^-}{2} \Delta + h(\bar{X}_i) \sqrt{\Delta} \\ \Upsilon_1^- &:= \bar{X}_i + f(\bar{X}_i) \Delta - g(\bar{X}_i) \frac{u^+ + u^-}{2} \Delta + h(\bar{X}_i) \sqrt{\Delta} \\ \Upsilon_2^- &:= \bar{X}_i + f(\bar{X}_i) \Delta + g(\bar{X}_i) \frac{u^+ + u^-}{2} \Delta - h(\bar{X}_i) \sqrt{\Delta} \end{aligned}$$

ergibt

$$\begin{aligned} h(\Upsilon^+) &= h(\overline{X}_i) + \frac{\partial h}{\partial x} \left(f(\overline{X}_i)\Delta + g(\overline{X}_i)\frac{u^+ + u^-}{2}\Delta + h(\overline{X}_i)\sqrt{\Delta} \right) \\ &\quad + O(\sqrt{\Delta}), \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} h(\Upsilon_1^-) &= h(\overline{X}_i) + \frac{\partial h}{\partial x} \left(f(\overline{X}_i)\Delta - g(\overline{X}_i)\frac{u^+ + u^-}{2}\Delta + h(\overline{X}_i)\sqrt{\Delta} \right) \\ &\quad + O(\sqrt{\Delta}), \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} h(\Upsilon_2^-) &= h(\overline{X}_i) + \frac{\partial h}{\partial x} \left(f(\overline{X}_i)\Delta + g(\overline{X}_i)\frac{u^+ + u^-}{2}\Delta - h(\overline{X}_i)\sqrt{\Delta} \right) \\ &\quad + O(\sqrt{\Delta}). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Nach Subtraktion der Gleichungen (4.61) und (4.62) erhalten wir

$$g \frac{\partial h}{\partial x}(\overline{X}_i) \frac{u^+ + u^-}{2} \Delta = \frac{1}{2} (h(\Upsilon^+) - h(\Upsilon_1^-)) + O(\sqrt{\Delta}).$$

Daraus ergibt sich

$$L^1 h(\overline{X}_i) \cdot \frac{u^+}{2} Z \Delta^{3/2} = \frac{1}{2} Z \frac{u^+}{u^+ + u^-} (h(\Upsilon^+) - h(\Upsilon_1^-)) \sqrt{\Delta} + O(\Delta). \quad (4.64)$$

Nach Subtraktion der Gleichungen (4.61) und (4.63) folgt analog

$$L^1 h(\overline{X}_i) \cdot \frac{1}{2} (Z^2 - 1) \Delta = \frac{1}{4} (Z^2 - 1) (h(\Upsilon^+) - h(\Upsilon_2^-)) \sqrt{\Delta} + O(\Delta). \quad (4.65)$$

Letztendlich betrachten wir die Taylor-Entwicklung der Ordnung 2 für h in den Punkten Υ_1^- und Υ_2^- :

$$\begin{aligned} h(\Upsilon_1^-) &= h(\overline{X}_i) + \frac{\partial h}{\partial x} \left(f(\overline{X}_i)\Delta - g(\overline{X}_i)\frac{u^+ + u^-}{2}\Delta + h(\overline{X}_i)\sqrt{\Delta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left(f(\overline{X}_i)\Delta - g(\overline{X}_i)\frac{u^+ + u^-}{2}\Delta + h(\overline{X}_i)\sqrt{\Delta} \right)^2 + O(\Delta) \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} h(\Upsilon_2^-) &= h(\overline{X}_i) + \frac{\partial h}{\partial x} \left(f(\overline{X}_i)\Delta + g(\overline{X}_i)\frac{u^+ + u^-}{2}\Delta - h(\overline{X}_i)\sqrt{\Delta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left(f(\overline{X}_i)\Delta + g(\overline{X}_i)\frac{u^+ + u^-}{2}\Delta - h(\overline{X}_i)\sqrt{\Delta} \right)^2 + O(\Delta) \end{aligned} \quad (4.67)$$

Nach Summation der beiden Gleichungen erhalten wir

$$\frac{h(\Upsilon_1^-) + h(\Upsilon_2^-)}{2} = h(\bar{X}_i) + f \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{X}_i) \Delta + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\bar{X}_i) \Delta + O(\Delta),$$

woraus sich sofort

$$L^0 h \cdot \frac{1}{2} Z \cdot \Delta^{3/2} = \frac{1}{4} Z \sqrt{\Delta} (h(\Upsilon_1^-) + h(\Upsilon_2^-) - 2h(\bar{X}_i)) + O(\Delta^{3/2}) \quad (4.68)$$

ergibt.

Jetzt können wir alle Summanden in (4.56) gemäß den Gleichungen (4.58), (4.60), (4.64), (4.65) und (4.68) ersetzen. Nach einfachen Umformungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{X}_{i+1} &= \bar{X}_i + \frac{1}{2} \left(f(\tilde{\Upsilon}) + f(\bar{X}_i) \right) \cdot \Delta + \left(\frac{u^-}{2} g(\tilde{\Upsilon}) + \frac{u^+}{2} g(\bar{X}_i) \right) \cdot \Delta \\ &\quad + \frac{1}{2} Z \frac{u^+}{u^+ + u^-} (h(\Upsilon^+) - h(\Upsilon_1^-)) \sqrt{\Delta} + \frac{1}{4} Z (h(\Upsilon_1^-) + h(\Upsilon_2^-) + 2h(\bar{X}_i)) \cdot \sqrt{\Delta} \\ &\quad + \frac{1}{4} (Z^2 - 1) (h(\Upsilon^+) - h(\Upsilon_2^-)) \cdot \sqrt{\Delta} \end{aligned}$$

mit $\tilde{\Upsilon}$, Υ^+ , Υ_1^- , Υ_2^- und Z wie oben definiert.

Die ableitungsfreie Schemata für allgemeine Fälle d , k , $m = 1, 2, \dots$ lassen sich nach dem gleichen Muster herleiten.

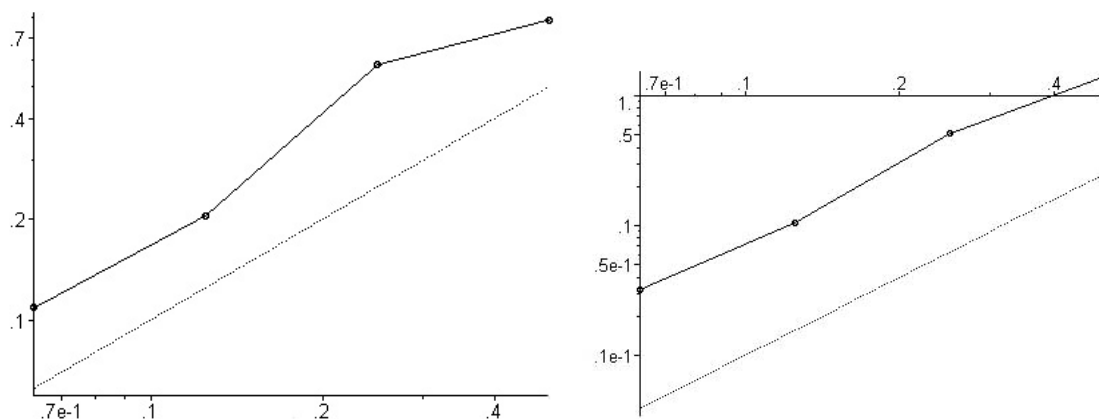
4.5 Numerische Beispiele für schwache Approximationen

Wir benutzen das Beispiel aus dem Abschnitt 3.4

$$\begin{aligned} dX(t) &= u(t)X(t)dt + 2X(t)dW(t) \\ X(0) &= 1, \quad u(t) = \sin\left(\frac{40}{t}\right), \quad u(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.69)$$

um die Verfahren der schwachen Ordnung $\beta = 1$ und $\beta = 2$ zu testen. Dafür wird der Fehler dieser Verfahren ausgerechnet, wobei, ähnlich wie im Abschnitt 3.4.1 Erwartungswerte als Mittelwerte von 1000 verschiedenen Experimenten approximiert werden. Hier haben wir die Funktion $g(x) = x$ gewählt, um die Abhängigkeit des Fehlers

von Δ zu veranschaulichen. Wir verwenden doppellogarithmische Graphik. Die Abbildung 4.1 bestätigt die in diesem Kapitel erhaltenen theoretischen Resultate: Die Fehler über Δ sind annähernd Geraden. Für das schwache Euler-Verfahren hat die Gerade die Steigung 1, während sie für das Verfahren der schwachen Ordnung $\beta = 2$ die Gerade die Steigung 2 aufweist.



Abbildungung 4.1: Fehler des schwachen Euler-Verfahrens und die Gerade $y = x$ (links) und Fehler des Verfahrens der schwachen Ordnung 2 im Vergleich zur Geraden $y = 2x$ (rechts) in log-log-Skalierung.

Am Beispiel (3.42) können wir noch eine wichtige Anwendung der schwachen Approximation demonstrieren. Schwache Verfahren werden oft benutzt, um Erwartungswerte sowie Momente des Ito-Prozesses zu approximieren. Für die stochastische Differentialgleichung (4.69) lässt sich der Erwartungswert der exakten Lösung analytisch berechnen. Es gilt

$$dEX(t) = u(t) \cdot EX(t) dt.$$

Diese einfache Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen besitzt die Lösung

$$EX(t) = X(0) \exp\left\{\int_0^t u(s) ds\right\}.$$

Der Erwartungswert $EX(t)$ lässt sich auch approximieren. Dafür werden M verschiedene Trajektorien mit dem schwachen Euler-Verfahren erzeugt. Der Erwartungswert der Lösung wird als Mittelwert über M angenähert. Die Abbildung 4.2 zeigt den Erwartungswert (4.5) und seine Euler-Approximation für $M = 1000$ und $\Delta = 2^{-4}$.

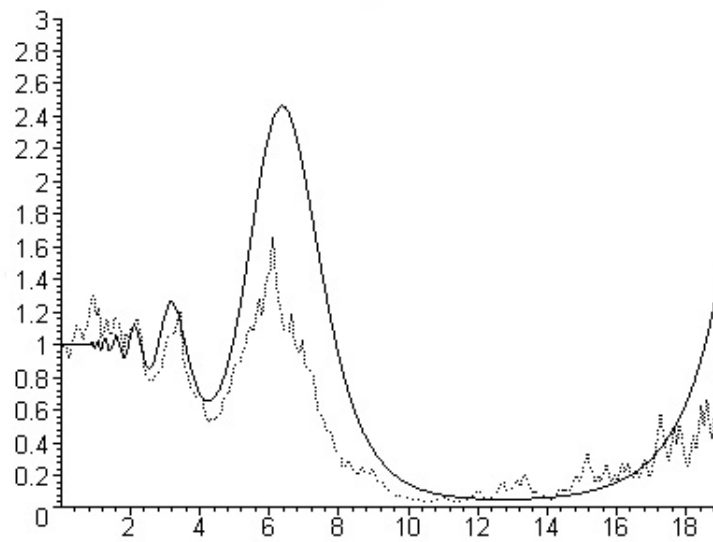


Abbildung 4.2: $EX(t)$ (schwarz) und ihre Euler-Approximation (gestrichelt).

Kapitel 5

Offene Probleme

Aus dieser Arbeit kristallisieren sich einige Fragen heraus, die als Ausgangspunkte für weitere Überlegungen dienen könnten.

1. Optimale Kontrolle

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der numerischen Approximation der Lösungen von stochastischen affinen Kontrollsystemen für gegebene Kontrollfunktion u . Es gibt allerdings eine Reihe von Problemen, die durch stochastische Systeme beschrieben werden und Parameter enthalten, die so angepasst werden können, dass ein gewisses Ziel auf optimalem Wege erreicht wird. Man spricht dann von *Optimierungsaufgaben*. Typische Beispiele sind die Regulierung eines chemischen Reaktors oder der Orbit eines Satelliten mit minimalem Energieaufwand bzw. die Wahl eines Investmentportfolios mit maximalem Ertrag. Manche solche Probleme lassen sich durch in dieser Arbeit betrachtete stochastische affine Kontrollsysteme beschreiben mit einem Kontrollparameter $u \in \mathbb{R}^d$, der so gewählt werden soll, dass das Kostenkriterium

$$J(x; u) = E \left(K(T, X(T)) + \int_0^T F(t, X(t), u) dt \mid X(0) = x \right)$$

minimiert wird. Hier sind K und F vorgegebene Funktionen. Es ist wichtig, geeignete numerische Methoden zur Lösung von stochastischen Optimierungsaufgaben zu entwickeln. Für einen Spezialfall

$$dX(t) = \epsilon \cdot f(t, X(t)) dt + B(t)u dt + h(t) dW(t)$$

mit einem $\epsilon \ll 1$, $g(t, X(t)) = B(t)$ und $h(t, X(t)) = h(t)$ wurde ein Iterationsverfahren zur Bestimmung des optimalen u in [1] präsentiert.

2. Integralapproximationen für allgemeines u

Bei der Approximation der Ito-Kontrollintegrale im Abschnitt 4.3 haben wir u als stückweise stetig und hinreichend glatt vorausgesetzt. Die Frage der Integralapproximation für ein allgemeines messbares u ist also noch offen. Ein möglicher Ansatz könnte der Vorschlag von L. Grüne (siehe [6], Abschnitt 9.1) sein.

3. Nicht affin-lineare stochastische Kontrollsysteme

Angeregt durch die Arbeit [7] von L. Grüne und P. Kloeden, in der Systeme der Form

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t)) \cdot G(t, u(t)) dt$$

untersucht wurden, ergibt sich noch folgende Fragestellung. Ausgehend von einem allgemeinen nicht affin-linearen stochastischen Kontrollsystem, d.h. von einem System der Form

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t), u(t)) dt + h(t, X(t)) dW(t)$$

wäre es interessant zu untersuchen, ob sich starke und schwache numerische Verfahren in ähnlicher systematischer Weise wie in der vorliegenden Arbeit herleiten lassen.

4. Stochastische Kontrolle

Es gibt eine Reihe von Problemen, die durch stochastische Kontrollsysteme beschrieben werden, in denen die Kontrolle u nicht deterministisch, sondern stochastisch ist. Eine affin-lineare Version eines solche Systems ist ebenfalls von der Form (1.2), wobei u ein stochastischer Prozess ist.

Es wäre interessant zu untersuchen, ob die in dieser Arbeit dargelegten Überlegungen und hergeleitete Verfahren sich auf stochastische Kontrollsysteme dieses Typs übertragen lassen. Möglicherweise muss dafür der Prozess u als nicht vorhersagbar bezüglich des Wiener-Prozesses vorausgesetzt werden.

Anhang A

Benutzte Formeln

In dieser Arbeit wurden (oft ohne gesonderten Hinweis) folgende bekannte Eigenschaften des Erwartungswertes verwendet.

Linearität:

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E X + \beta E Y$$

Höldersche Ungleichung:

$$E|X \cdot Y| \leq (E|X|^2)^{1/2} \cdot (E|Y|^2)^{1/2}$$

Minkowskische Ungleichung:

$$(E|X + Y|^2)^{1/2} \leq (E|X|^2)^{1/2} + (E|Y|^2)^{1/2}$$

Folgerungen aus *Jensen-Ungleichung*:

$$\begin{aligned} |E(X)| &\leq E|X| \\ |E(X)| &\leq (E|X|^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Dabei sind X, Y Zufallsvariablen, für die die vorkommenden Momente existieren, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Bedingte Erwartungen:

Für σ -Algebren \mathcal{S}, \mathcal{T} mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ gilt:

$$E(E(X|\mathcal{T})|\mathcal{S}) = E(X|\mathcal{S}) \quad \text{m. W. 1.}$$

Ist X unabhängig von den Ereignissen in \mathcal{S} , so gilt

$$E(X|\mathcal{S}) = E(X) \quad \text{m. W. 1.}$$

Außerdem wurden folgende Eigenschaften des *Ito-Integrals* benutzt:

$$\begin{aligned} E(I(f)) &= 0 \\ E(I(f)^2) &= \int_0^T E(f(t, \cdot)^2) dt \\ I(\alpha f + \beta g) &= \alpha I(f) + \beta I(g) \\ E(I(f) \cdot I(g)) &= \int_0^T E(f(t, \cdot)g(t, \cdot)) dt \end{aligned}$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $T \geq 0$, vorausgesetzt, die vorkommenden Momente existieren.

Darüberhinaus haben wir die *Gronwall-Ungleichung* verwendet:

Seien Funktionen $\alpha, \beta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar mit

$$0 \leq \alpha(t) \leq \beta(t) + L \int_{t_0}^t \alpha(s) ds$$

für $t \in [t_0, T]$, wobei $L > 0$. Dann gilt

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + L \int_{t_0}^t e^{L(t-s)} \beta(s) ds.$$

Anhang B

Hilfskonstruktionen

B.1 Box-Müller Methode zur Konstruktion $N(0, 1)$ -verteilter Zufallsvariablen aus auf $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen.

Lemma B.1.1 *Seien U_1, U_2 unabhängige und auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Dann sind die transformierten Zufallsvariablen*

$$G_1 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cdot \cos(2\pi U_2), \quad (\text{B.1})$$

$$G_2 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cdot \sin(2\pi U_2) \quad (\text{B.2})$$

unabhängig und $N(0, 1)$ -verteilt.

Beweis: Aus (B.1) und (B.2) folgt sofort:

$$U_1 = e^{-\frac{G_1^2 + G_2^2}{2}},$$
$$U_2 = \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{G_1}{G_2}.$$

Für die gemeinsame Verteilung von G_1, G_2 gilt:

$$F_{G_1, G_2}(a, b) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{G_1, G_2}(g_1, g_2) dg_2 dg_1$$

$$= \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{U_1, U_2}(u_1(g_1, g_2), u_2(g_1, g_2)) \cdot |\det Du(g)| dg_2 dg_1,$$

dabei ist $Du(g) = \left[\frac{\partial u_i}{\partial g_j} \right]$ die Jacobi-Matrix von $u(g)$.

Also folgt für die gemeinsame Dichte von G_1 und G_2

$$\begin{aligned} f_{G_1, G_2}(a, b) &= f_{U_1, U_2}(a, b) \cdot |\det Du(g)| \\ &= f_{U_1}(a, b) f_{U_2}(a, b) \cdot |\det Du(g)|. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{U_1}(a, b) &= f_{U_2}(a, b) = 1 \text{ auf } [0, 1] \\ Du(g) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial g_1} & \frac{\partial u_1}{\partial g_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial g_1} & \frac{\partial u_2}{\partial g_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_1 \cdot e^{-\frac{G_1^2 + G_2^2}{2}} & -G_2 \cdot e^{-\frac{G_1^2 + G_2^2}{2}} \\ -\frac{1}{2\pi} \frac{G_2}{G_1^2 + G_2^2} & \frac{1}{2\pi} \frac{G_1}{G_1^2 + G_2^2} \end{bmatrix} \\ \det Du(g) &= -\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{G_1^2 + G_2^2}{2}}. \end{aligned}$$

Also

$$f_{G_1, G_2}(g_1, g_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{G_1^2 + G_2^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{g_1^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{g_2^2}{2}} = f_{G_1}(g_1) \cdot f_{G_2}(g_2),$$

d.h. G_1 und G_2 sind unabhängige $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen. \square

B.2 Lévy-Konstruktion.

Zur Approximation des Pfades eines Wiener-Prozesses auf dem Intervall $[0, T]$ wird der folgende Algorithmus verwendet:

- (i) Setze $W_0 = 0$, $W_T = \zeta$ und $\delta = \frac{T}{2}$.
- (ii) Für $k = 1, 3, \dots, \frac{T}{\delta} - 1$ definiere

$$W_{k\delta} := \frac{1}{2} (W_{(k-1)\delta} + W_{(k+1)\delta}) + \sqrt{\frac{\delta}{2}} \zeta.$$

(iii) Setze $\delta = \frac{\delta}{2}$ und fahre fort bei (ii).

Hierbei bezeichnet ζ eine (jeweils neue) $N(0, T)$ -verteilte Zufallszahl.

Literaturverzeichnis

- [1] W.N. Afanasjev, W.B. Kolmanovsky, W.R. Nosov, *Mathematische Theorie der Konstruktion von Kontrollsystemen*, Vysshaja Shkola, Moskau (1998). (In Russisch).
- [2] N. Bouleau, D. Lépine, *Numerical Methods for Stochastic Processes*, Wiley, New-York (1994).
- [3] S. Cyganowski, L. Grüne and P.E. Kloeden, *MAPLE for Stochastic Differential Equations, in Theory and Numerics of Differential Equations*, (J.F. Blowey, J.P. Coleman, A.W. Craig, eds), Springer Verlag (2001), 127–178.
- [4] I.I. Gihman, A.V. Skorohod, *Controlled Stochastic Processes*, Springer-Verlag (1979).
- [5] I.I. Gichman, A.W. Skorocho, *Stochastische Differentialgleichungen*, Akademie-Verlag Berlin (1971).
- [6] L. Grüne, P.E. Kloeden, *Higher Order Numerical Schemes for Affinely Controlled Nonlinear Systems*, Numerische Mathematik 89 (2001), 669–690.
- [7] L. Grüne, P.E. Kloeden, *Numerical Schemes of Higher Order for a Class of Nonlinear Control Systems*, Proceeding of the Fifth International Conference on Numerical Methods and Applications — NM&A 02, Borovets, Bulgaria (2002), eingereicht.
- [8] N. Hofmann, *Beiträge zur schwachen Approximation stochastischer Differentialgleichungen*, Dissertation, Seminarbericht Nr. 95-2, Humboldt-Universität zu Berlin (1995).

- [9] P.E. Kloeden, E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag (1995).
- [10] G.N. Milstein, *Numerical Integration of Stochastic Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers (1995).
- [11] E.O. Roxin, *Control Theory and its Applications*, Gordon and Reach Science Publishers (1997).
- [12] W. Semmler, M. Sieveking *On Optimal Exploitation of Interacting Resources*, Journal of Economics, 59 (1994), pp. 23–49.
- [13] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer-Verlag (1990).